

R. EÖTVÖS

Bestimmung der Gradienten
der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen
mit Hülfe der Drehwage

L. n. 33. 271

Szerzői jogdíj

1983 MAR 14

INTERNATIONALE ERDMESSUNG.

1994 -08- 3 0

E. 1.



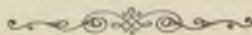
BESTIMMUNG DER GRADIENTEN
DER SCHWERKRAFT UND IHRER NIVEAUFLÄCHEN
MIT HÜLFE DER DREHWAGE,

VON

Baron ROLAND EÖTVÖS.

Budapest.

Aus dem 1en Band der Abhandlungen der XV. Allgemeinen Konferenz
der Erdmessung in Budapest 1906.



BUCHHANDLUNG UND DRUCKEREI vormals E. J. BRILL
LEIDEN — 1907.



1 B2/200 00009130
TTK KARI kv.
Földtudományi Szakgy.

Bericht über die geodätischen Arbeiten in Ungarn.

Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hülfe der Drehwage

VON

Baron ROLAND EÖTVÖS.

EINLEITUNG.

In einer Abhandlung, welche ich in Wiedemann's Annalen veröffentlicht ¹⁾, sowie in dem Referate, welches ich dem Pariser physikalischen Kongress 1900 ²⁾ vorgelegt, wurde gezeigt, dass die Drehwage zur Untersuchung der räumlichen Veränderungen der Schwerkraft, insbesondere auch zur Bestimmung der Krümmungsverhältnisse seiner Niveaulächen mit Erfolg benützt werden kann.

Damals konnte ich nur in wenigen Beispielen zeigen, wie meine theoretischen Erörterungen und im Laboratorium erprobten Beobachtungsmethoden auch bei Untersuchungen im Freien Verwertung finden. Seither ist es mir aber möglich geworden durch Unterstützung der Ung. Akademie der Wissenschaften, und besonders durch die Munificenz des hochherzigen Unterstützers aller wissenschaftlichen Bestrebungen in Ungarn, des Herrn A. v. SEMSEY, meine Apparate zu vervollkommen und auch systematische Beobachtungen in grösseren Gebieten auszuführen.

So: im Jahre 1901 auf der Eisdecke des Balaton (Plattensee) an 33 Stationen;
im Jahre 1902 nördlich der Fruska Gora an 20 Stationen;
im Jahre 1903 wiederholt am Balaton an 12, dann von der Fruska Gora bis Szabadka an 19, und bei Arad an 19 Stationen;
im Jahre 1904 an 70 Stationen das ganze Fruska Gora-Gebirg umschliessend;
im Jahre 1905 an 75 Stationen von Arad über Versecz bis Oravicza, und

1) Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Band 59, 1896, 354—400.

2) Étude sur les surfaces de niveau etc. Rapports présentés au Congrès international de Physique 1900. Tome III. 371—393.

von Versecz nach Alibunár, das Gebirg in seiner Fortsetzung unter den alluvialen Aufschüttungen der Ebene verfolgend.

Im Jahre 1906 sind die schon früher begonnenen Arbeiten bei Arad fortgesetzt worden, und erstreckten sich bis Ende November auf weitere 84 Stationen.

Den grössten Teil dieser Arbeiten besorgte Herr Dr. D. PEKÁR, der mir seit Beginn dieser meiner Versuche hilfreich zur Seite stand. Zusammen mit ihm beobachteten in den Jahren 1902—1904 Herr Dr. L. STEINER, der besonders die gleichzeitig fortgeführten magnetischen Messungen besorgte, und seit 1905 Herr J. FEKETE. An den ersten Versuchen am Balaton nahmen auch die Herren Prof. L. v. LÓCZY, Prof. Dr. v. KÖVESLIGETHY, Prof. J. v. CHOLNOKY und Baron HARKÁNYI teil.

So häufte sich ein ansehnliches Beobachtungsmaterial zusammen, dessen vollständige Zusammenstellung nicht die Aufgabe dieser meiner Abhandlung sein kann. Ich will es aber versuchen eine kurze Darstellung zu geben:

erstens von der Theorie und der Ausführung meiner Methode;

zweitens von ihrer Anwendung zur Ermittlung geodetischer Daten;

drittens von ihrem Werte zur Beantwortung von Fragen, welche sich auf die Massenverteilung in der Erdkruste beziehen und somit in das Gebiet der Geologie fallen;

viertens, werde ich noch auf die engen Beziehungen hinweisen, welche zwischen den von mir gewonnenen Daten und den magnetischen Störungen bestehen.

Im Laufe dieser Ausführungen wird sich Gelegenheit finden einzelne Beobachtungsgebiete beispielsweise ausführlicher zu behandeln.

I. THEORIE UND AUSFÜHRUNG DER METHODE.

1. THEORETISCHES.

In meinen oben erwähnten Abhandlungen habe ich nachgewiesen, dass die Torsionswaage in Folge der räumlichen Veränderungen der Schwerkraft eine Drillung erleidet. Unter Annahme der im Raume linear variirender Schwerkraft, welche in den engen Grenzen der Apparate zulässig ist, lässt sich diese Drillung theoretisch leicht bestimmen. Ihre Abhängigkeit von der Form und der Massenanordnung des Gehänges habe ich in den schon erwähnten Abhandlungen behandelt; hier will ich nur zwei Formen ins Auge fassen, welche mir bei den zu besprechenden Beobachtungen dienstlich waren.



Figur 1.

Die erste Form ist die eines horizontal schwebenden cylindrischen Hohlstabes, von geringem Querschnitt und an beiden Enden mit hineingeschobenen cylindrischen Massen belastet (Fig. 1). Die zweite unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass die belastende Masse an einem Ende durch Aufhängung tiefer gelegt ist (Fig. 2). Es sei nun U die Potentialfunktion der Schwerkraft, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $x y z$, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkte des Gehänges liegt und

dessen z-Achse in diesem Punkte vertikal abwärts gerichtet ist. Bezeichnen wir dann mit K das Trägheitsmoment des Gehänges, mit α den Winkel zwischen der Achse des Stabes und der x-Achse des Koordinatensystems, so ist das Drehungsmoment F für das Gehänge erster Form:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2\alpha \dots 1.)$$

Für das Gehänge der zweiten Form erhalten wir dagegen, wenn m die tiefer aufgehängte Masse, h ihren vertikalen Abstand vom Stabe und l ihren Drehungsarm bedeutet:

$$F = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} m h l \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} m h l \cos \alpha \dots 2.)$$

In der Gleichgewichtslage ist nun:

$$F = \tau \vartheta,$$

wo ϑ den Torsionswinkel, τ die Torsionskonstante des Aufhänge-
drahtes bedeutet und daher für das Gehänge erster Form:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{K}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{K}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \dots 3.)$$

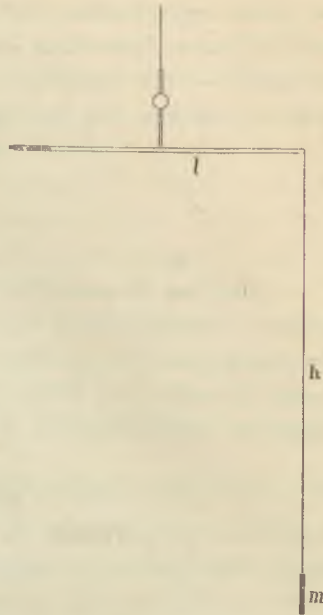
für das Gehänge zweiter Form:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{K}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{K}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha - \frac{m h l}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + \frac{m h l}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha \dots 4.)$$

Indem man das ganze Instrument durch Drehung um eine vertikale Achse in verschiedene Lagen bringt, verändert sich diese Drillung und es kann ihre Veränderung bei beliebiger Veränderung des Azimuths α beobachtet werden. So kann man, wie ich weiter unten ausführlicher zeigen werde, durch eine entsprechende Anzahl von Beobachtungen in verschiedenen Azimuthen die Werte folgender vier Grössen bestimmen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Und zwar können mit einem Gehänge zweiter Form alle vier, mit einem solchen der ersten Form aber nur die beiden letzten ermittelt werden. Die Bedeutung dieser Grössen



Figur 2.

für die Ermittlung der räumlichen Veränderungen der Schwerkraft und die Krümmungen der Niveauflächen ist schon nach einem flüchtigen Blick augenfällig. Erwähnen will ich noch, dass die Veränderungen des Drehungsmomentes F bei Veränderung des Azimuths α auch in der Schwingungsdauer des Gehänges zu erkennen sind, und es lassen sich daher die oben angeführten vier Grössen auch durch Beobachtung dieser Schwingungsdauer in verschiedenen Azimuthen bestimmen. Diesbezüglich begnüge ich mich mit dem Hinweise auf meine schon erwähnten Abhandlungen, da hier nur von Beobachtungen die Rede sein soll, bei welchen die Ruhelage des Gehänges bestimmt wurde.

2. APPARATE.

Bei der Konstruktion der im Prinzip äusserst einfachen Apparate, welche zur praktischen Verwirklichung der vorangehenden theoretischen Betrachtungen dienen sollen, ist die aussergewöhnlich geringe Grösse der zu bestimmenden Daten besonders ins Auge zu fassen. Es sollen da Werte derselben, die nur $1 \cdot 10^{-9}$ C. G. S., oder noch kleiner sind, mit möglichst vollkommenem Ausschluss störender Einflüsse bestimmt werden. Wie ein Blick auf Formel 3.) oder 4.) zeigt, ist die Torsion \mathfrak{T} mit $\frac{K}{T}$, also mit dem Quadrate der Schwin-

gungsdauer proportional. Es handelt sich also hauptsächlich um die Herstellung von Drehwagen sehr grosser Schwingungsdauer. Bei Anwendung der üblichen Spiegelablesung, wobei noch ein Winkel von circa ein Zehntel Minute erkennbar ist, muss die einfache Schwingungsdauer die Grösse von zehn Minuten = 600 Sek. übersteigen, um die erzielte Empfindlichkeit von $1 \cdot 10^{-9}$ zu erreichen. Herr M. BRILLOUIN konnte sich durch Anwendung seiner empfindlicheren Ablesungsvorrichtung auch mit etwas kleineren Schwingungsdauern begnügen.

Durch entsprechende Wahl des Aufhängedrahtes oder Quarzfadens und der Dimensionen des Balkens kann diesem Bedürfnisse genügt werden, ja es wäre möglich die Empfindlichkeit z. B. durch Anwendung meines Gravitationskompensators (s. WIEDEMANN'S Annalen Bd. 59, Seite 392) bis zu beliebiger Höhe zu steigern.

Ohne hierauf näher einzugehen, will ich mich hier auf die kurze Beschreibung der von mir im freien Felde benutzten Apparate beschränken.

Als Gehänge dient eine dünnwandige Messingröhre von 40 cm. Länge und 0,5 cm. Durchmesser; in diese ist an einem Ende ein Platincylinder im Gewichte von 30 gr. hineingeschoben, während an dem anderen Ende ein solcher von circa 26 Gramm an einem etwa 65 cm. langen Drahte herunterhängt. Aus der Mitte des Balkens ragt nach oben ein 10 cm. langer Stab empor, der den Spiegel trägt und zur Befestigung des Torsionsdrahtes dient.

Als Torsionsdraht benützte ich bei meinen zum Transport eingerichteten Instrumenten Platindrähte von 0,04 mm. Durchmesser. Besonders eigneten sich hierzu die von C. HERAEUS bezogenen, welche mit 20% Iridium legiert und um Deformationen möglichst zu vermeiden, auf eine Spule von 25 cm. Durchmesser gewickelt mir zugeschiedt wurden. Sogleich nach Empfang aus der Fabrik wurden an beide Enden der 65 cm. langen Stücke dieses

Drahtes durchlöchernte Messingplättchen gelötet; diese dienen zur sicheren Befestigung an das Gehänge einerseits, an den Torsionskopf andererseits.

Eine grössere Zahl so hergerichteter Drähte in feststehendem Kasten aufgehängt, belastete ich mit Gewichten von 80 Gramm, entsprechend dem Gewichte des ganzen Gehänges, das sie in meinen Instrumenten zu tragen haben. Die Drähte wurden auch einer langsamen Erwärmung auf circa 100° Celsius und darauf folgender langsamen Abkühlung unterworfen, zu welchem Zwecke ich mir in neuester Zeit einen mit Leuchtgas heizbaren Ofen herstellen liess, in dem die belasteten Drähte aufbewahrt werden und in welchem an ihnen die Procedur der Erwärmung und Abkühlung bequem und oft wiederholt werden kann. So behandelte Drähte sind schon nach einigen Tagen nach Bezug aus der Fabrik brauchbar; sie zeigen zwar noch eine langsame Verrückung der Gleichgewichtslage, welche täglich einige Minuten beträgt, diese hat aber schon einen genügend regelmässigen Verlauf, um bei Beobachtungen mit in die Rechnung gezogen werden zu können. Nach Monaten, und noch mehr nach Jahren verringert sich dieser Gang immer mehr und mehr, so dass ich Drähte besitze, bei denen dieselbe scheinbar schon ganz verschwunden ist. Spuren einer solchen Wanderung der Gleichgewichtslage bleiben aber doch nach jeder Arretierung und Desarretierung der Instrumente bemerkbar, ohne doch die Beobachtungen wesentlich zu stören.

Ein weit grösserer Nachteil der Verwendung von Metalldrähten besteht darin, dass dieselben je nach der remanenten Drillung, mit welcher sie die Öse verlassen, eine individuell variirende Empfänglichkeit für Temperatureinflüsse besitzen. Ihre Gleichgewichtslage verändert sich also auch mit der Temperatur und ist sogar von dem zeitlichen Verlaufe der Temperaturveränderungen abhängig. Bei vorgewärmten ausgehangenen Drähten kann aber diese Verschiebung der Gleichgewichtslage, welche einige Zehntel Minuten für 1° Celsius nicht übersteigt, durch einen für jeden Draht eigens bestimmten Temperaturkoeffizienten befriedigend dargestellt, und als Korrektur in Rechnung gezogen werden. Beobachtungsergebnisse, die weiter unten folgen, sollen dies beweisen. Nur im Falle einer plötzlichen Veränderung im Gange der Temperatur wird dieser Fehler störend bemerkbar.

Es drängt sich hier die Frage auf, warum ich denn nicht die von den Nachteilen der elastischen Nachwirkung viel weniger behafteten Quarzfäden bevorzugte. Meine Antwort ist, dass ich diese Versuche zu einer Zeit begann, da die Benützbarkeit der Quarzfäden noch nicht bekannt war und ich meine Apparate den mir damals zu Gebote stehenden Platindrähten entsprechend dimensionierte. Quarzfäden, die ein Gehänge von 80 Gramm tragend noch die erwünschte grosse Schwingungsdauer ergeben, sind aber so brüchig, dass sie bei fixer Aufhängung im Laboratorium wohl noch brauchbar, auf Reisen aber der Gefahr des Zerreißens zu sehr ausgesetzt sind. Nur Apparate mit leichten Gehängen, also filigraner Ausführung könnten diesem Übel abhelfen. Die Herstellung solcher Apparate habe ich derzeit selbst in Angriff genommen.

Einige Worte werden nun genügen zur Beschreibung der diese Drehwagen einschliessenden Gehäuse. Dieselben sollen gegen äussere Einflüsse, insbesondere gegen Strahlungen Schutz gewähren, und sind desswegen aus doppelwandigen oder gar aus dreiwand-

digen Messing-kästen und Röhren zusammengesetzt, von etwa 3 mm. Wandstärke. Das Gehäuse selbst ist um eine vertikal stellbare Achse drehbar und auf festem Gestelle aufgesetzt, wobei zur Ablesung der Drehung des Gehäuses ein in drittel Grade geteilter horizontaler Kreis, zur Ablesung der Stellung des mit Spiegel versehenen Wagebalkens aber ein an dem Gehäuse befestigtes Fernrohr dient. Letzteres ist ein gebrochenes Fernrohr

um die Ablesungen auch in kleineren Räumen zu ermöglichen. Die Länge des das Fernrohr tragenden Armes wurde auch aus demselben Grunde auf ungefähr 60 Centimeter herabgesetzt, wobei bei der Spiegelablesung Skalen mit Halbmillimeter Teilung erforderlich sind.

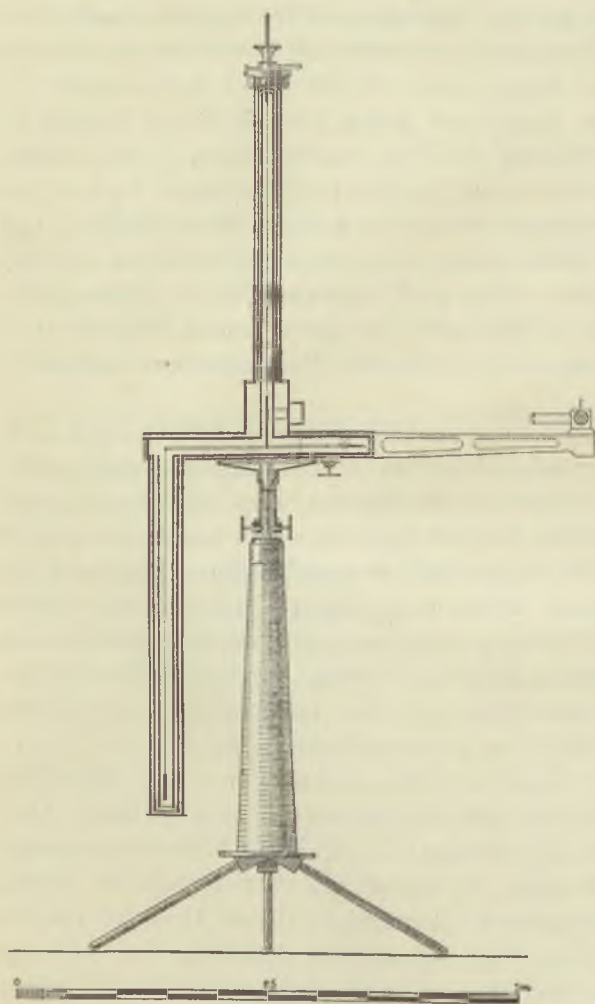
Bei Beobachtungen im Felde wird das Instrument in einem transportablen Häuschen von 2×2 Meter Grundfläche aufgestellt, dessen Wände aus wasserdichter Leinwand bestehen.

So erhält die Drehwage gehörigen Schutz um mit derselben bei Ausschluss der Sonnenstrahlung, also während der Nachtstunden, brauchbare Resultate zu erzielen. Bisher ist es mir nicht gelungen Apparate herzustellen, welche bei Arbeiten im Freien auch bei Tag benützt werden könnten, doch hoffe ich auch dies erreichen zu können.

Was die weiteren Einzelheiten der Konstruktion betrifft, so war für dieselben maassgebend, dass die Instrumente Reiseinstrumente werden sollten. Dementsprechend musste für eine sichere Befestigung ihrer einzelnen Teile und für die bequeme Verpackung des Ganzen vorgesorgt werden.

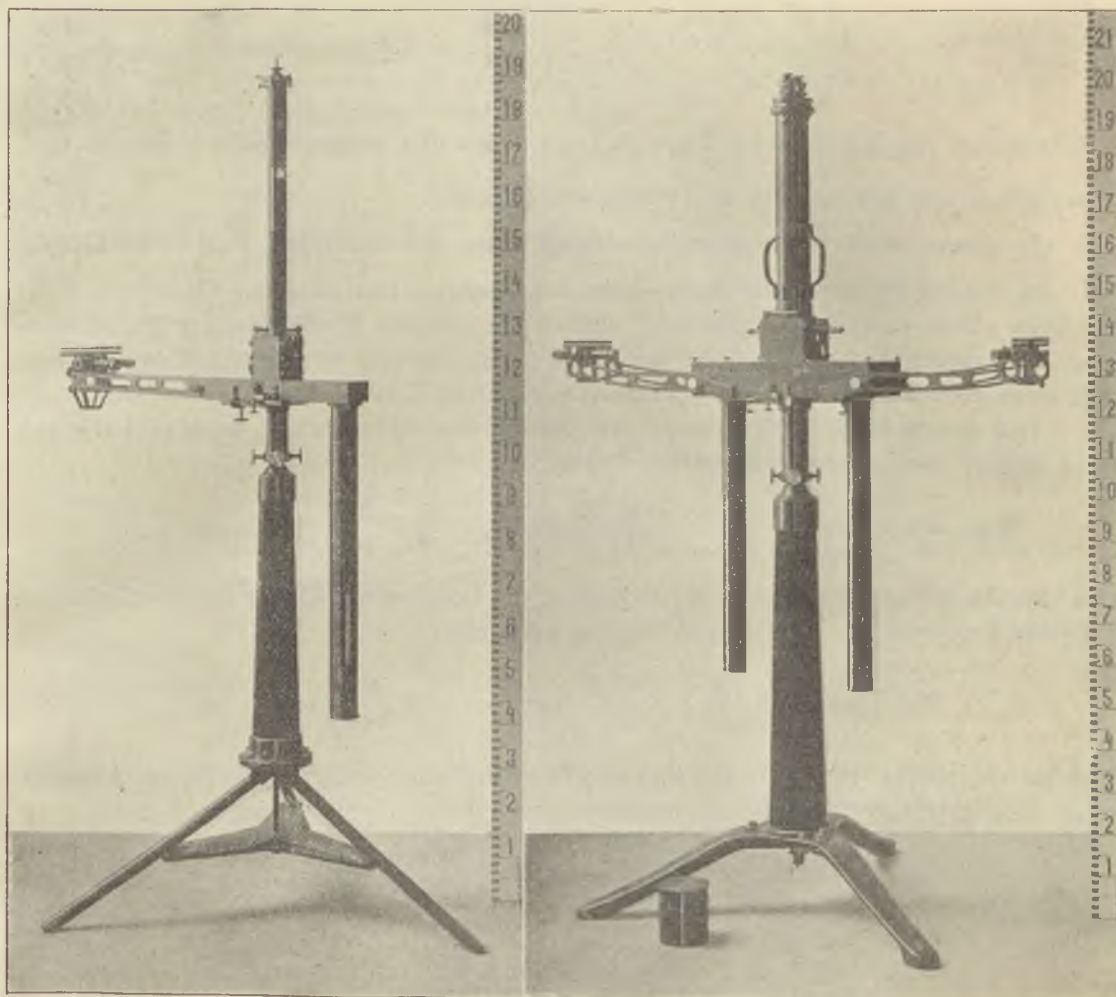
Diese Erfordernisse ins Auge fassend entstanden nun folgende zwei, von mir und meinen Genossen bei den bisherigen Beobachtungen verwendete Instrumente:

- a.) Ein einfaches Schwerevariometer, dessen Einrichtung aus dem Querschnitte (Fig. 3) und aus seinem fotografisch hergestellten Bilde (Fig. 4) ersichtlich ist, und
- b.) Ein doppeltes Schwerevariometer (Fig. 5) aus der Verbindung zweier einfachen



Figur 3.

hergestellt, dessen Vorteile weiter unten sich ergeben werden. Beide Instrumente sind von Herrn Mechaniker F. Süss in Budapest mit grosser Sorgfalt und Präcision ausgeführt. Ein einzelnes dieser Instrumente genügt zur vollständigen Lösung der Aufgabe, da es alle vier mit der Drehwage bestimmbaren Grössen ergiebt. Instrumente mit Gehängen erster Art



Figur 4.

Figur 5.

(siehe oben), welche zwar nur die Bestimmung zweier dieser Grössen ermöglichen, diese aber wegen des leichteren und vollkommeneren Schutzes gegen äussere Einflüsse mit grösserer Genauigkeit ergeben, habe ich bisher nur im Laboratorium benützt. Von solchen soll im Laufe dieser Schrift nicht mehr die Rede sein.

3. BESTIMMUNG DER KONSTANTEN DER INSTRUMENTE.

Zur Ermittlung der gesuchten Grössen dienen Gleichungen von der Form 4.), diese enthalten die Grössen

$$\frac{K}{\tau}$$

und

$$\frac{m h l}{\tau}$$

als Konstanten des Instrumentes. Da m, h, l mit Wage und Messstab leicht abmessbar sind, so handelt es sich nur um die Bestimmung von $\frac{K}{\tau}$ und τ .

In einem Raume konstanter Schwerkraft liesse sich die Grösse $\frac{K}{\tau}$ in üblicher Weise nach der Formel für gedämpfte Schwingungen bestimmen. Das hängende Gewicht m muss allerdings näher zum Balken gebracht werden, um störende Einflüsse seiner Pendelbewegung auf langem Faden zu vermeiden. In einem Raume aber mit veränderlicher Schwerkraft muss auch der Einfluss dieser Veränderung mit in Rechnung gezogen werden.

Das gesammte Drehungsmoment, welches auf den Balken wirkt, kann im Falle dass $h = 0$ gesetzt wird, ausgedrückt werden durch

$$F = -\tau(\vartheta + \varepsilon) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{K}{2} \sin 2(\alpha + \varepsilon) + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2(\alpha + \varepsilon)$$

wo ε den Ausschlagswinkel bedeutet, und daher, die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts in Betracht ziehend, für kleine Ausschlagswinkel auch:

$$F = \left(-\tau + K \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha - 2K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha \right) \varepsilon$$

Bezeichnen wir dann mit T die Schwingungsdauer um eine Gleichgewichtslage im Azimuthe α , mit T' dagegen die Schwingungsdauer um eine hierauf normale Lage, so ist:

$$+\tau - K \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha + 2K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha = \frac{\pi^2 K}{T^2}$$

und

$$+\tau + K \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha - 2K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha = \frac{\pi^2 K}{T'^2}$$

Somit:

$$\frac{K}{\tau} = \frac{1}{2\pi^2} (T'^2 + T^2).$$

Wollen wir auch noch den Einfluss der Länge h in Betracht ziehen, so können wir $\frac{K}{\tau}$ auf Grundlage der Formel 2.) aus Beobachtungen in 4 aufeinander normalen Stellungen mit noch grösserer Strenge bestimmen.

Zur Ermittlung von τ dient eine Wiederholung des Cavendishschen Versuches, indem die durch eine etwa 10 Kilogram schwere Bleikugel auf das hängende Gewicht bewirkte Ablenkung gemessen wird. Bei der grossen Empfindlichkeit der Drehwage lässt sich dies leicht und mit Sicherheit ausführen, da ja Ablenkungen bis zu einem Grad und darüber erzielt werden können.

Als erklärendes Beispiel möge die Bestimmung der Konstanten des einfachen Variometers N^o. II dienen, welches bei den Messungen bis zum Jahre 1903 fast ausschliesslich benützt wurde.

In zwei aufeinander normalen Stellungen erhielten wir folgende Werte für die mit Chronometer direkt beobachteten Schwingungsdauern:

$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
$T = 11 \text{ m } 12,6 \text{ s}$	$T' = 11 \text{ m } 8,9 \text{ s}$
» 11,9 s	» 8,1 s
» 11,4 s	» 9,2 s
» 12,4 s	» 9,2 s
» 12,1 s	» 9,5 s
» 11,4 s	» 8,5 s
Im mittel: $T = 11 \text{ m } 11,97 \text{ s}$	$T' = 11 \text{ m } 8,90 \text{ s}$
Oder: $T = 671,97 \text{ s}$	$T' = 668,90 \text{ s}$

Das reciproke Dämpfungsverhältniss war 0,396 und daher die von dem Einflusse der Dämpfung befreiten Schwingungsdauern

$$T_0 = 644,51 \text{ s. und } T'_0 = 641,57 \text{ s.}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\frac{K}{\tau} = \frac{1}{2\pi^2} (T_0^2 + T_0'^2) = 41896$$

Es wurde dann eine genau gearbeitete Bleikugel zur Ablenkung des hängenden Gewichtes abwechselnd an der einen und anderen Seite hingestellt. Hierbei verlegte sich die Gleichgewichtslage in drei aufeinander folgenden Versuchen gleich bleibend um 34,5 Skalenteile. Zur Berechnung von τ diente dann folgende Formel:

$$\tau \frac{n' - n}{2D} = 2G \frac{Mm}{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\rho^2}}} l.$$

Bedeutung und Werte der hier auftretenden Grössen waren die folgenden:

$n - n'$ die Verschiebung der Gleichgewichtslage bei einem Umlegen der Bleikugel in Skalenteilen = 34,5

D Entfernung von Skale und Spiegel in Skalenteilen = 1232

G die Gravitationskonstante = $66,3 \cdot 10^{-9}$

- M die Masse der Bleikugel = 13137 Gr.
 m die Masse des vertikal hängenden Platincylinders = 25,43 Gr.
 λ die Länge des Platincylinders = 6,0 cm.
 ρ die mittlere Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Achse des angezogenen Cylinders = 11,01 cm.
 l der Drehungsarm des hängenden Platingewichtes = 20,0 cm.

Hieraus wird berechnet:

$$\tau = 0,5035,$$

und da an dem Instrumente bei dieser Bestimmung

$$h = 56,6 \text{ cm.}$$

war,

$$\frac{mhl}{\tau} = 57173.$$

Diese Werte der Konstanten in Gleichung 4) gesetzt geben dann die beim Gebrauche dieses Instrumentes dienende Grundformel. Noch vorteilhafter ist es die abgelesene Skala-
zahl n in diese Gleichung einzuführen. Wenn nämlich n_0 der vorläufig unbekannte Skalen-
wert der Gleichgewichtslage bei ungedrilltem Drahte bedeutet, so ist für Ablesungen mit
gebrochenem Fernrohre

$$\frac{n_0 - n}{2D} = \mathfrak{S}$$

und da $D = 1232$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 n_0 - n = & +0,05162 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 10^9 \sin 2\alpha + 0,10323 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} 10^9 \cos 2\alpha - \\
 & - 0,14087 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} 10^9 \sin \alpha + 0,14087 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} 10^9 \cos \alpha \dots \dots 5)
 \end{aligned}$$

Die hier angeführten Zahlenwerte erleiden für dasselbe Instrument eine entsprechende
Veränderung, wenn h anders gewählt wird, oder der Torsionsfaden mit einem neuen ver-
tauscht wird. Da aber in solchen Fällen K unverändert bleibt, so ist es ausreichend nur
eine der oben beschriebenen Operationen auszuführen und so τ entweder nur aus Schwin-
gungsbeobachtungen, oder nur aus Ablenkungen zu bestimmen.

Auch kann man an Orten, wo die Schwerkraftsveränderungen mit einem Instrumente
bereits bestimmt worden sind, die Konstanten eines anderen Instrumentes durch vergleichende
Beobachtungen ermitteln.

4. GANG DER BEOBSACHTUNGEN UND BERECHNUNG DER RESULTATE.

Für das Instrument N^o II leiteten wir die Gleichung 5.) ab. Für ein anderes wird in allgemeinen:

$$\begin{aligned} n_0 - n = & D \frac{K}{\tau} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2D \frac{K}{\tau} \frac{\partial U^2}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha - \\ & - 2D \frac{mhl}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + 2D \frac{mhl}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha \dots\dots 6.) \end{aligned}$$

Um mit Hülfe dieser Beziehung der vier gesuchten Unbekannten, zu denen sich als fünfte noch n_0 gesellt, bestimmen zu können, müssen Skalenwerte n in fünf verschiedenen Azimuthen beobachtet werden. So erhalten wir fünf Gleichungen von der Form 6.), aus denen n_0 eliminiert und die gesuchten vier Grössen berechnet werden können. Dabei ist eine mannigfaltige Wahl der Azimuthen zulässig.

Es sollen hier nur zwei solche besprochen werden, solche, die wir am meisten benützten. Bei Arbeiten mit dem einfachen Instrumente N^o II, wurde in den Azimuthen 0°, 72°, 144°, 216° und 288° beobachtet, mit Benutzung der entsprechenden Gleichgewichtslagen n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , und n_5 erhalten wir dann für die gesuchten Grössen die Werte:

$$\begin{aligned} 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= -2,7011 (n_5 - n_2) - 1,6694 (n_4 - n_3) \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= +2,2976 (n_4 + n_3 - 2n_1) - 0,8776 (n_5 + n_2 - 2n_1) \\ 10^9 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= +4,5543 (n_5 - n_2) - 7,3691 (n_4 - n_3) \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= -1,1972 (n_4 + n_3 - 2n_1) + 3,1342 (n_5 + n_2 - 2n_1) \end{aligned}$$

Die Azimuthe wurden vom magnetischen Meridian ab von Norden nach Osten gerechnet, und zwar bedeutet α den Winkel, welchen die von der Drehungsachse nach dem Aufhangungspunkte des Platincylinders gezogene Richtung mit der magnetischen Nordrichtung bildet.

Zur Einstellung auf $\alpha = 0$ dient, eine an das drehbare Gehäuse sich anschmiegende Boussole, zur Einstellung auf andere Azimuthe der schon erwähnte horizontale Teilkreis, die Lage des Gehäuses angehend. Erwähnen will ich, dass die Drehungen des Gehäuses und die Veränderungen des Azimuthes α strenge genommen nicht gleich mit einander sind, da ja der Wagebalken in Folge der Schwerkraftsänderungen ihre Lage zum Gehäuse verändert. Die Werte von $(n_0 - n)$ bedürfen daher, wenn wir dieselben in die Gleichung 6.) zusammen mit jenen Werten von α einführen wollen, welche allein durch die Kastenlage gegeben sind, noch einer Korrektion.

Diese ist laut Gleichung 6.):

$$\Delta(n_0 - n) = \left\{ 2A \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 10^9 \cos 2\alpha - \right. \\ \left. - 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} 10^9 \sin 2\alpha - a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} 10^9 \cos \alpha - b \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} 10^9 \sin \alpha \right\} \frac{n - n_0}{2D}$$

Nur in seltenen Fällen, bei äusserster Genauigkeit der Beobachtungen ist diese Korrektur von Belang. Bei der Berechnung meiner im Freien ausgeführten Beobachtungsergebnisse, wo eine solche Genauigkeit nicht erzielt werden konnte, war auch von dieser Korrektur abzusehen, wodurch die Rechnungen sehr vereinfacht wurden.

An einem Beispiele soll der Gang einer Beobachtungsreihe und ihrer Berechnung veranschaulicht werden. Der Apparat N° II wurde in einem Zimmer des physikalischen Instituts aufgestellt und von Mitte September 1906 bis Ende April 1907 bei verdunkelten Fenstern während der Tagesstunden regelmässig beobachtet. Die Gleichgewichtslage wurde immer aus einer einzigen Ablesung bestimmt zu einer Zeit, da der Balken schon in vollkommene Ruhe kam. In Folge der verhältnissmässig grossen Dämpfung des Gehäuses tritt diese Ruhe in $1\frac{3}{4}$ Stunden nach vorheriger Drehung des Apparates mit Sicherheit ein. Diese Art der Bestimmung der Gleichgewichtslage ist der aus Schwingungsbeobachtungen darum vorzuziehen, weil der störende Einfluss des länger in der Nähe sich aufhaltenden Beobachters vermieden wird. Fotografische Registrierung ist gewiss noch vorteilhafter.

Der Apparat wurde also in Zeiträumen von 2 Stunden abgelesen und gleich darauf in die folgende um 72° abstehende Stellung gebracht. Um die schon oben erwähnte Temperaturkorrektur zu ermöglichen, wurde jedesmal auch die Temperatur im Inneren des Gehäuses und auch ausserhalb desselben abgelesen. Für den Draht des Instrumentes beträgt diese Korrektur aus langen Beobachtungsreihen bestimmt $+ 0,4$ Skalenteile für 1° C .

Aus der langen Reihe dieser unter günstigen Verhältnissen ausgeführten Beobachtungen, greife ich jene von 10 Tagen, und zwar von 2^{ten} bis 11^{ten} December heraus, während welcher Zeit die Temperaturextreme $15,9^\circ$ und $14,4^\circ \text{ C}$ waren. Nächstfolgende Tabelle enthält die Werte der auf die gleiche Temperatur von 15° reduzierten Skalenteile in den fünf Stellungen I bis V an den zehn aufeinander folgenden Tagen:

Stellung	α	2/XII.	3/XII.	4/XII.	5/XII.	6/XII.	7/XII.	8/XII.	9/XII.	10/XII.	11/XII.	Mittel.
I.	0°	204,5	204,6	204,5	204,5	204,5	204,5	204,5	204,6	204,5	204,4	204,51
II.	72°	200,7	200,7	200,7	200,7	200,8	200,8	200,8	200,8	200,7	200,7	200,74
III.	144°	193,2	193,2	193,1	193,3	193,3	193,2	193,2	193,2	193,1	193,2	193,20
IV.	216°	183,2	183,3	183,2	183,2	183,2	183,2	183,2	183,2	183,3	183,0	183,20
V.	288°	199,1	199,1	199,1	199,0	199,0	199,1	199,1	199,2	199,1	199,1	199,09

Hieraus lassen sich aus den beobachtungen je eines Tages folgende Werte berechnen:

Datum	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$	$10^9 \left(\frac{\partial U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$
2/XII.	+ 21,02	— 66,83	+ 66,40	+ 10,19
3/XII.	+ 20,85	— 66,88	+ 65,67	+ 9,69
4/XII.	+ 20,85	— 67,06	+ 65,67	+ 10,31
5/XII.	+ 21,45	— 66,51	+ 65,69	+ 9,76
6/XII.	+ 21,72	— 66,60	+ 66,23	+ 10,07
7/XII.	+ 21,29	— 66,92	+ 65,95	+ 10,50
8/XII.	+ 21,29	— 66,92	+ 65,95	+ 10,50
9/XII.	+ 21,02	— 67,30	+ 66,41	+ 10,43
10/XII.	+ 20,68	— 66,83	+ 64,93	+ 10,19
11/XII.	+ 21,35	— 67,00	+ 67,88	+ 10,82
Mittel:	+ 21,12	— 66,89	+ 66,08	+ 10,25

Die Abweichungen der einzelnen Tageswerte von den Mittelwerten betragen also nur Ausnahmsweise mehr als eine Einheit von der Ordnung 10^{-9} , wodurch wir ein Maass der erreichten Genauigkeit erhalten. Beobachtungen im Freien sind unter günstigen Verhältnissen auch nicht mit grösseren Fehlern behaftet, wie dies an einem anderen Beispiele gezeigt werden wird.

Bei solchen im Freien ausgeführten Beobachtungen kann die störende Sonnenwirkung bisher nur dadurch ausgeschlossen werden, dass die Beobachtungen zur Nachtzeit ausgeführt werden. Eine Nacht reicht aber kaum aus um die volle Beobachtungsserie mit fünf Einstellungen auszuführen, umsoweniger, da zur Sicherung der Resultate auch die Wiederholung wenigstens einiger Einstellungen erwünscht ist. So lange uns nur einfache Apparate wie N^o II zu Gebote standen, mussten wir daher an jeder Station wenigstens zwei Nächte verweilen, in jeder nur einen Teil der Einstellungen absolvierend.

Diesem Übelstande wird durch das doppelte Schwerevariometer abgeholfen (s. o.), welches seit dem Jahre 1903 im Gebrauche ist und es ermöglicht in kürzerer Zeit mehr zu leisten. Die zwei Wagebalken sind in diesem doppelten Instrumente parallel aufgehängt, aber bezüglich des hängenden Gewichtes entgegengesetzt gerichtet. Gleichzeitig mit der

Beobachtung im Azimuthe α des einen Balkens ist daher auch eine Beobachtung am anderen Balken im Azimuthe $\alpha + \pi$ ermöglicht.

Die Wahl der Einstellungen kann auch bei der Benützung dieses Instrumentes in mannigfacher Weise getroffen werden. Ich will aber hier nur eine Gruppierung der Einstellungen behandeln, welche wir am meisten gebrauchten. Beobachtet wurde in drei Stellungen

$$\begin{aligned} \text{I. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Azimuth des Balkens I } \alpha_1 = 0 \\ \text{» » » II } \alpha'_1 = 180^\circ \end{array} \right. \\ \text{II. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Azimuth des Balkens I } \alpha_2 = 120^\circ \\ \text{» » » II } \alpha'_2 = 300^\circ \end{array} \right. \\ \text{III. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Azimuth des Balkens I } \alpha_3 = 240^\circ \\ \text{» » » II } \alpha'_3 = 60^\circ \end{array} \right. \end{aligned}$$

Wir setzen nun in Gleichung 6.) zur Abkürzung:

$$D \frac{K}{\tau} = a, \quad 2D \frac{mhl}{\tau} = b,$$

und benützen die Gleichung:

$$n_0 - n = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha - b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + b \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha$$

für den Balken I; eine zweite solche Gleichung mit u' , a' , b' , α' diene für den Balken II.

Dann ergibt die Rechnung für die Gleichgewichtslagen in den drei Stellungen:

$$\begin{aligned} \text{I. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} n_0 - n_1 = +2a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ n'_0 - n'_1 = +2a' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - b' \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \\ \text{II. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} n_0 - n_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\sqrt{3}}{2} b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{b}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ n'_0 - n'_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - a' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\sqrt{3}}{2} b' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{b'}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \\ \text{III. Stellung} & \left\{ \begin{array}{l} n_0 - n_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2} a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\sqrt{3}}{2} b \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{b}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ n'_0 - n'_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2} a' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - a' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\sqrt{3}}{2} b' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{b'}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Da wie ersichtlich:

$$(n_0 - n_1) + (n_0 - n_2) + (n_0 - n_3) = 0$$

und

$$(n'_0 - n'_1) + (n'_0 - n'_2) + (n'_0 - n'_3) = 0,$$

so kann man drei Gruppen von Gleichungen aus den obigen ableiten, welche die zu bestimmenden vier Grössen durch die Skalendifferenzen (vom Nullpunkte gerechnet) nur je zweier der drei Stellungen ausdrücken. Um den Gang der weiteren Berechnung erklären zu können, will ich die so geformten Gleichungen für den von uns benützten Apparat, und zwar für jene Drähte aufschreiben, welche in denselben seit August 1905 benützt wurden.

I. Gruppe $(n_2 - n_0)$ und $(n_3 - n_0)$ enthaltend:

$$\begin{aligned} 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= + 1,585 \left\{ \left[(n_2 - n_0) - (n_3 - n_0) \right] - (1 - 0,0432) \left[(n'_2 - n'_0) - (n'_3 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= + 2,745 \left\{ \left[(n_2 - n_0) + (n_3 - n_0) \right] - (1 - 0,0432) \left[(n'_2 - n'_0) + (n'_3 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= + 5,408 \left\{ \left[(n_2 - n_0) - (n_3 - n_0) \right] + (1 - 0,0333) \left[(n'_2 - n'_0) - (n'_3 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= + 4,683 \left\{ \left[(n_2 - n_0) + (n_3 - n_0) \right] + (1 - 0,0333) \left[(n'_2 - n'_0) + (n'_3 - n'_0) \right] \right\} \end{aligned}$$

II. Gruppe $(n_3 - n_0)$ und $(n_1 - n_0)$ enthaltend:

$$\begin{aligned} 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= - 1,585 \left\{ \left[2(n_3 - n_0) + (n_1 - n_0) \right] - (1 - 0,0432) \left[2(n'_3 - n'_0) + (n'_1 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= - 2,745 \left\{ (n_1 - n_0) - (1 - 0,0432) (n'_1 - n'_0) \right\} \\ 10^9 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= - 5,408 \left\{ \left[2(n_3 - n_0) + (n_1 - n_0) \right] + (1 - 0,0333) \left[2(n'_3 - n'_0) + (n'_1 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= - 4,683 \left\{ (n_1 - n_0) + (1 - 0,0333) (n'_1 - n'_0) \right\} \end{aligned}$$

III. Gruppe $(n_1 - n_0)$ und $(n_2 - n_0)$ enthaltend:

$$\begin{aligned} 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= + 1,585 \left\{ \left[2(n_2 - n_0) + (n_1 - n_0) \right] - (1 - 0,0432) \left[2(n'_2 - n'_0) + (n'_1 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= - 2,745 \left\{ (n_1 - n_0) - (1 - 0,0432) (n'_1 - n'_0) \right\} \\ 10^9 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= + 5,408 \left\{ \left[2(n_2 - n_0) + (n_1 - n_0) \right] + (1 - 0,0333) \left[2(n'_2 - n'_0) + (n'_1 - n'_0) \right] \right\} \\ 10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= - 4,683 \left\{ (n_1 - n_0) + (1 - 0,0333) (n'_1 - n'_0) \right\} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung einer Beobachtungsreihe wurden diese Gleichungengruppen folgeweise angewendet. Die jeder Stellung entsprechende Nullage des Drahtes (n_0) wurde nach der Formel:

$$n_0 = \frac{1}{3} (n_1 + n_2 + n_3)$$

aus der Lage des Balkens in dieser, der vorangehenden und darauf folgenden Stellung berechnet. Hierdurch wird der Einfluss einer, sich mit der Zeit proportional fortschreitenden Ausdrillung des Torsionsdrahtes eliminiert.

Ein grosser Vorteil dieser Berechnungsart besteht auch darin, dass bei ihrer Anwendung nach der ersten Ablesung nur drei neue Einstellungen und Ablesungen erforderlich sind, um eine Wertgruppe zu erhalten. Jede weitere Einstellung und Ablesung gibt je eine neue Wertgruppe.

Wenn die Zeitdauer zwischen Einstellung und Ablesung auf das zulässige Minimum von $1\frac{3}{4}$ Stunden herabgesetzt wird, dann steht uns die zu einer vollen Beobachtung erforderliche Nachtzeit von $3 \times 1\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$ Stunden in unseren Breiten auch während der Sommermonate zur Verfügung. Besser eignen sich aber dazu die Herbst- und Wintermonate.

Nebst der Beobachtung der Gleichgewichtslage wurde jedesmal auch die Temperatur abgelesen an vier Thermometern, deren eines a ausserhalb des Zelttes, ein anderes o oben am Apparate angebracht, die übrigen zwei: I und II, aber in dem Schwingungsraume der Gehänge I und II vertieft sind. Diese zwei Thermometer dienen zur Reduktion auf gleiche Temperatur. Die Temperaturkoeffizienten, durch sorgfältige Beobachtungen im Laboratorium bestimmt, waren für den Draht I: $\beta = +0.50$, für den Draht II: $\beta = -0.08$. Eine Übersicht des Ganges von Beobachtung und Rechnung bietet die auf der nächsten Seite folgende Tabelle, herausgenommen aus unserem Beobachtungsjournal vom Jahre 1906.

In dieser Tabelle beziehen sich die Stellungszahlen I, II, III auf die Azimuthe $\alpha = 0$, $\alpha = 120$ und $\alpha = 240$. Die direkten Ablesungen sind an jedem Tage auf die Anfangstemperatur reduziert und in der Tabelle mit n und n' bezeichnet. In den Columnen S und S' sind die Summen dreier aufeinander folgenden Werte von $n - n_0$, resp. $n' - n'_0$ angegeben. Indem diese Summen bei voller Genauigkeit gleich Null sein sollten, giebt ihr Wert ein gewisses Maass der Zuverlässigkeit. Bei der Berechnung der in den letzten vier Columnen enthaltenen Mittelwerte wurde dem in der Mitte der Nacht erzielten Werte doppeltes Gewicht beigelegt.

Gestützt nicht nur auf diese Beispiele sondern auf eine lange Reihe von Beobachtungen kann ich behaupten, dass es möglich ist die gesuchten Grössen mit einer Genauigkeit bis zu 1.10^{-9} C. G. S. im Verlaufe einer Nacht zu bestimmen. Unter günstigen Witterungsverhältnissen kann diese Genauigkeit noch anwachsen, sie verringert sich aber, wie schon erwähnt, besonders bei rascher Änderung des Temperaturganges. Diesem Übelstande ist nur durch Wiederholung der Beobachtungen abzuhelpfen.

Ich erwähnte, dass die Einstellung des Instrumentes in die Anfangslage mit Hilfe einer Boussole geschah. Um Irrungen zu vermeiden, benützten wir auch im weiteren Verlaufe unserer Beobachtungen die magnetische Meridianebene als xz Ebene des Koordinatensystems. Die auf den magnetischen Meridian bezogenen Werte wurden aber dann immer auf den astronomischen Meridian umgerechnet.

Zeit der Beobachtung 1906	Stellung	Ableseung der Gleichgewichtslage		Temperaturen				Gehänge I				Gehänge II				$\frac{z \rho \times \rho}{n \times \rho} \cdot 100$	$\frac{z \rho \times \rho}{n \times \rho} \cdot 100$	$\left(\frac{z \rho}{n \times \rho} - \frac{z \rho}{n \times \rho} \right) \cdot 100$		
		Gehänge I Gehänge II		a	o	I	II	n	n _o	n - n _o	S	n'	n' - n _o	S'						
		Gehänge I	Gehänge II																	
Station 2155. Puszta Kúvin.																				
23—24 Okt.																				
9 h 0 m	I	210,9	194,5	11,2	12,0	12,0	11,9	210,9				194,1	186,93	+ 0,17		—	2,8	+ 38,6	+ 72,7	— 10,8
10 h 45 m	II	221,0	187,1	10,8	11,5	11,5	11,4	221,3	215,90	+ 5,40		187,2	186,93	— 7,73	+ 0,01	—	2,8	+ 33,5	+ 72,5	— 11,0
12 h 30 m	III	215,0	179,8	10,6	11,1	11,1	11,0	215,5	215,90	— 0,40	+ 0,03	179,5	186,93	+ 7,57	+ 0,01	—	—	—	—	—
2 h 15 m	I	210,4	194,6	10,8	10,9	11,0	10,8	210,9	215,87	— 4,97	— 0,10	194,5	186,93	+ 7,57	+ 0,01	—	—	—	—	—
4 h 0 m	II	220,6	187,2	10,2	10,8	10,8	10,7	221,2	215,98	+ 5,27		187,1	186,93	+ 0,17	Mittel:	—	—	—	—	—
5 h 45 m	III	214,9	179,3	9,7	10,4	10,4	10,3	215,7				179,2				—	—	—	—	—
Station 2156. Kovaszinecz 1.																				
24—25 Okt.																				
9 h 0 m	I	211,2	189,6	+ 3,3	+ 4,2	+ 5,5	+ 5,3	211,2				189,6	183,93	+ 0,97		—	20,1	+ 24,6	+ 10,6	— 9,0
10 h 45 m	II	212,7	185,1	+ 1,1	+ 1,6	+ 2,7	+ 2,3	214,2	215,13	— 0,93		184,9	183,93	— 6,03	+ 0,17	—	—	—	—	—
12 h 30 m	III	217,6	177,7	— 1,0	0	+ 0,7	+ 0,5	220,0	215,53	+ 4,47	+ 0,11	177,3	183,98	— 6,03	+ 0,17	—	20,0	+ 24,7	+ 9,0	— 10,4
2 h 15 m	I	209,2	190,1	— 1,9	— 1,3	— 0,8	— 0,8	212,4	215,83	— 3,43	+ 0,14	189,6	183,77	+ 5,83	+ 0,10	—	—	—	—	—
4 h 0 m	II	211,4	185,0	— 3,5	— 2,7	— 1,9	— 1,8	215,1	216,00	— 0,90		184,4	183,50	+ 0,90		—	19,9	+ 24,7	+ 11,6	— 10,4
5 h 45 m	III	216,0	177,2	— 5,0	— 4,2	— 3,5	— 3,3	220,5				176,5			Mittel:	—	20,0	+ 24,7	+ 10,1	— 10,1
Station 2157. Kovaszinecz 2.																				
25—26 Okt.																				
9 h 0 m	I	210,0	189,0	+ 3,0	+ 3,8	+ 4,2	+ 4,1	210,0				189,0	182,60	+ 1,20		—	19,8	+ 23,5	+ 21,7	— 15,4
10 h 45 m	II	210,7	184,0	— 0,3	+ 0,3	+ 1,2	+ 1,1	212,2	213,00	— 0,80		183,8	182,60	— 7,37	— 0,27	—	—	—	—	—
12 h 30 m	III	214,2	175,4	— 2,0	— 2,1	— 1,0	— 1,0	216,8	213,38	+ 3,47	+ 0,04	175,0	182,37	— 7,37	— 0,27	—	20,2	+ 22,7	+ 22,9	— 14,4
2 h 15 m	I	207,4	188,9	— 3,6	— 3,2	— 2,9	— 2,9	211,0	213,63	— 2,63	+ 0,01	186,3	182,40	+ 5,90	— 0,04	—	—	—	—	—
4 h 0 m	II	208,9	184,6	— 4,2	— 5,0	— 4,2	— 4,1	213,1	213,93	— 0,83		183,9	182,47	+ 1,43		—	20,1	+ 22,7	+ 22,6	— 14,4
5 h 45 m	III	213,0	175,9	— 5,8	— 5,8	— 5,2	— 5,0	217,7				175,2			Mittel:	—	20,1	+ 22,9	+ 22,6	— 14,7

Eine solche Transformation wegen neuer Wahl des Koordinatensystems war auch in anderen Teilen dieser Untersuchung notwendig; sie geschah mit Zuhilfenahme folgender Formeln.

Sind x, y, z und x', y', z' zwei rechtwinkelige Koordinatensysteme mit gemeinschaftlicher z Achse und bedeutet α den Winkel den die x' -Achse mit der x -Achse in der positiven Richtung von x nach y bildet, so ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial z'} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial y' \partial z'} \sin \alpha \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial z'} \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y' \partial z'} \cos \alpha \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} \right) \cos 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'} \sin 2\alpha \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial y'} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots 7.)$$

II. GEODETISCHE UNTERSUCHUNGEN.

1. BEDEUTUNG DER VIER DURCH DIE DREHWAGE BESTIMMBAREN GRÖSSEN IN DER GEODESIE.

Es möge hier eine kurze Aufzählung jener Grössen folgen, welche mit den durch die Drehwage bestimmbaren Werten in engstem Zusammenhange stehen, und so mit Hülfe derselben gemessen werden können. Es sind diese:

1.) Die Gradienten der Schwerkraft in der Niveaufläche

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

also auch der totale Gradient:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)^2}$$

und seine Richtung ausgedrückt durch das Azimuth α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}$$

2.) Der Krümmungsradius r der Schwerkraftslinie.

$$r = \frac{g}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}}$$

und auch der Gradient $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$, welcher die Veränderung der Lotrichtung mit der Höhe angiebt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)^2}}{g}$$

3.) Die Abweichung der Niveaufläche von der Kugelgestalt gemessen durch die Differenz der reciproken Hauptkrümmungsradien $\frac{1}{\rho_1}$ und $\frac{1}{\rho_2}$

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \frac{1}{\cos 2\lambda}$$

wo, wenn ρ_1 den kleineren, ρ_2 dagegen den grösseren Hauptkrümmungsradius bezeichnet, die Differenz $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ stets positiv ist, und λ jenen Winkel bezeichnet, den die Normalebene mit grösseren Krümmungsradius ρ_2 und die xz Ebene einschliessen,

$$\lg 2\lambda = -\frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)}$$

4.) Die Richtungen der Hauptkrümmungslinien einer Niveaufläche gegeben durch den Wert dieses Winkels λ .

Aus jeder an einem Orte ausgeführten vollständigen Beobachtungsreihe erhalten wir einen Lokalwert dieser Grössen, welcher sich strenge genommen auf den Schwerpunkt des Gehänges bezieht, welcher Punkt bei der Aufstellung unserer Formeln und bei den noch folgenden Berechnungen auch als Koordinatenanfangspunkt dient.

Solche Lokalwerte, wie sie sich direkt aus der Beobachtung ergeben, sind noch kaum geeignet das Interesse des Geodeten zu erwecken. Sie sind zu sehr von den Wirkungen der zunächst gelegenen Massen beeinflusst. Im Inneren von Gebäuden, Höhlen, Bergwerken oder Tunneln sind diese Einflüsse sehr bedeutend, dagegen unter freiem Himmel besonders in ebenen Erdgebieten um vieles geringer.

Sie können durch Messung und Rechnung ermittelt, und so die Beobachtungsergebnisse von allen jenen Störungen befreit werden, welche man gewöhnlich als „zufällige“ oder „un-

wesentliche" bezeichnet. Die Unsicherheit solcher Benennungen will ich aber durch bestimmtere Definitionen ersetzen.

Nehmen wir an, dass die Schwerkraftsverhältnisse d. i. die Grösse und die Richtung der Beschleunigung, und die Form der Niveauflächen auf der Erde oder einem Teile der Erde bekannt sind, und es handelt sich um eine beschreibende Darstellung dieser unserer Erkenntniss, dann bietet sich uns hierzu kaum ein anderes Vorgehen, als diese jenen Kenntnissen anzuschliessen, welche uns bezüglich der topografischen Konfiguration der Erdoberfläche zur Verfügung stehen. Es sind daher die Werte der die Schwerkraftsverhältnisse darstellenden Grössen für eine Massenverteilung zu bestimmen, welche der topografischen Darstellung der Erdoberfläche entsprechen. Solche Werte werde ich im folgenden die topografischen Werte nennen, und in Klammern gesetzt mit dem oberen Index I bezeichnen. Diese topografischen Werte erhalten natürlich nur dann eine strenge Bedeutung, wenn das Kartenwerk angegeben wird, auf welches sie sich beziehen.

Die Wirkung der nächsten Umgebung wird nun insofern in Rechnung gezogen, als das Terrain Abweichungen von der in der benützten Landkarte dargestellten Konfiguration aufweist. Diese Wirkung nenne ich die Terrainwirkung und bezeichne sie mit dem Index t. So ist also:

Topografischer Wert = Voller Wert — Terrainwirkung
oder

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^I = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_t$$

u. s. w.

Im Folgenden werden aber noch einige weitere Benennungen und Bezeichnungen nötig sein, die ich gleich hier aufzählen will.

Entsprechend dem BESSEL'schen Ellipsoid und der HELMERT'schen Formel für die Beschleunigung lassen sich die Werte der normalen Wirkungen berechnen. Ich werde diese mit dem Index n versehen. So können dann noch gebildet werden:

der volle Störungswert = voller Wert — normale Wirkung

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^{II} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_n$$

u. s. w.

und:

der topografische Störungswert = topografischer Wert — normale Wirkung.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^{III} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^I - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_n = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_t - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_n$$

u. s. w.

Wenn aber, um dem Wunsche des Geologen zu entsprechen, aus den Schwerkraftstörungen Schlüsse auf die Verteilung von Massen gezogen werden sollen, welche unter der sichtbaren Erdoberfläche liegen, dann sind auch die Wirkungen der auf den Landkarten



verzeichneten Erhebungen und Senkungen möglichst in Rechnung zu ziehen. Diese Wirkung, deren Berechnung sich auf kartografische Werke stützt, will ich die kartografische Wirkung nennen und die entsprechenden Grössen mit dem Index k bezeichnen.

Ein Maass für die Wirkung der unsichtbaren Massen giebt dann:

der subterrane Störungswert = topografische Störungswert — kartografische Wirkung.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^{\text{IV}} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^{\text{III}} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_k = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_t - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)_k$$

u. s. w.

2. DIE WIRKUNG DER UNMITTELBAREN UMGEBUNG. TOPOGRAFISCHE WERTE.

Schwerkraftswirkungen können für jede bekannte Massenverteilung berechnet werden. Durch entsprechende Wahl des Beobachtungsortes wird es ermöglicht, dass diese Berechnung eine verhältnissmässig einfache wird. Bei der Aufstellung des Apparates ist besonders darauf zu achten, dass der Boden unter demselben innerhalb eines Kreises von circa zwei Meter Radius möglichst eben und von geringer Neigung sei. Der Boden ist, wenn nötig, dem entsprechend herzurichten. Die Konfiguration des umgebenden Terrains kann durch ein Nivellement in radialen Richtungen erkannt werden. Dieselbe erstreckte sich bei unseren Beobachtungen meistens auf die Entfernung von 100 Metern. Wenn dann die Dichte σ (Volumgewicht) der Bodenmassen auch bestimmt wird, so können die gesuchten Wirkungen berechnet werden.

Es sei die Lage eines anziehenden Massenelementes in horizontaler Projektion durch den Radius vector ρ und den Winkel α bestimmt, welche dieser mit der x -Achse bildet. Sei ferner ζ die Erhebung (positiv nach oben) dieses Massenelementes über jene horizontale Ebene, welche durch den Fusspunkt des Apparates geht, und h die Erhebung des Schwerpunktes des Gehänges (Koordinaten-Anfangspunkt) von derselben Ebene, dann kann man die gesuchten Wirkungen für ein Massenelement durch folgende Gleichungen in aller Strenge darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -3 G \sigma \rho^3 d\rho \frac{\cos 2\alpha d\alpha d\zeta}{(\rho^2 + (h-\zeta)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= +3 G \sigma \rho^3 d\rho \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha d\alpha d\zeta}{(\rho^2 + (h-\zeta)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= +3 G \sigma \rho^2 d\rho \frac{(h-\zeta) \cos \alpha d\alpha d\zeta}{(\rho^2 + (h-\zeta)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= +3 G \sigma \rho^2 d\rho \frac{(h-\zeta) \sin \alpha d\alpha d\zeta}{(\rho^2 + (h-\zeta)^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots 8.)$$

Unter Berücksichtigung, dass die Grösse:

$$\frac{\zeta^2 + 2h\zeta}{\rho^2 + h^2}$$

bei schwach geneigtem Terrain immer klein ist, erhalten wir durch Integration nach ζ für die Wirkungen einer sich aus der Fusspunktsebene erhebenden Säule von der Höhe ζ und dem unendlich kleinen Querschnitte $\rho d\rho d\alpha$ annäherungsweise:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -3G\sigma\zeta \frac{\rho^2 d\rho \cos 2\alpha d\alpha}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{3}{2} G\sigma\zeta \frac{\rho^2 d\rho \sin 2\alpha d\alpha}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= 3G\sigma\zeta \left(h - \frac{\zeta}{2}\right) \frac{\rho^2 d\rho \cos \alpha d\alpha}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= 3G\sigma\zeta \left(h - \frac{\zeta}{2}\right) \frac{\rho^2 d\rho \sin \alpha d\alpha}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots 9.)$$

Die Grösse ζ , welche die vertikale Koordinate der Bodenoberfläche bedeutet, kann durch Nivellement in gehörig vielen Punkten bestimmt werden. Um sich aber auf eine möglichst kleine Zahl solcher Punkte beschränken zu können, ist es zweckmässig, die Rechnung nicht bezüglich der wirklichen Oberfläche, sondern für eine solche auszuführen, welche sich dieser mit genügender Annäherung anschmiegt.

Auf ebenen oder schwachgewellten Terrains, wo die Neigungen der Gelände 7 bis 8 Grad nicht übersteigen, genügt das folgende Verfahren.

Das Terrain wird durch 8 sich unter 45° schneidende Geraden und durch Kreise mit den Radien 1,5 m., 5 m., 20 m., 50 m. und 100 m. in einzelne Parzellen geteilt. (Siehe Fig. 6).

Dann wird die Höhe ζ der acht Kreuzungspunkte an jedem Kreise durch Nivellement bestimmt. Wir setzen nun:

$$\zeta = c + ax + b\rho x + d\rho$$

und berechnen den Wert der Konstanten a, b, c, d für jede einzelne Parzelle mit Hülfe der Werte von ζ in den vier Eckpunkten derselben. Der innerste Kreis von 1,5 m. Radius bildet eine Parzelle für sich, und ihr Einfluss wird als der einer geneigten Ebene in Rechnung gezogen, deren Neigungen ε im Meridiane, α in der darauf normalen Richtung mit der Wasserwaage bestimmt werden.

Der Wert von ζ in die oben angeführten Gleichungen gesetzt, ergibt nach der Integration die Wirkungen für je eine Parzelle. Aus diesen Einzelnwirkungen wird dann mit Berücksichtigung der Richtungen α die Gesamtwirkung zusammengesetzt. Zum prak-

tischen Gebrauche habe ich Formeln berechnet, welche, so lange $\frac{\zeta}{\rho}$ nicht grösser als $\frac{1}{8}$ wird,

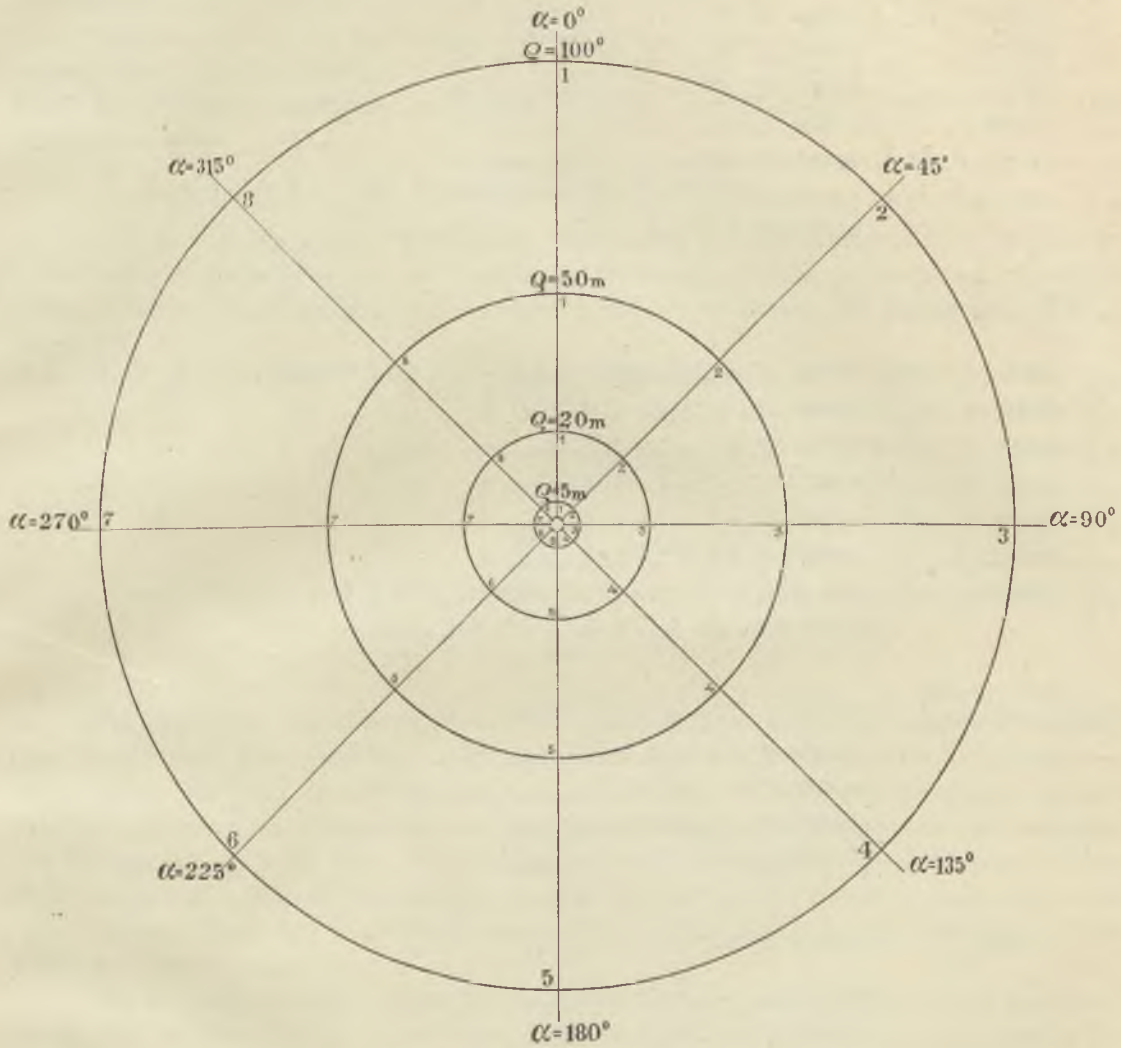


Fig. 6.

bis zu einer Genauigkeit von 0,1 der 10^{-9} Einheit genau sind. Diese Formeln beziehen sich auf die Schwerpunkthöhe $h = 100$ cm. (bis auf einige cm. genau abgemessen) und auf die Dichte $\sigma = 1,8$, sind also für andere Dichten mit dem Quotienten $\frac{\sigma}{1,8}$ zu multiplizieren. Die Formeln sind:

$$\begin{aligned}
10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = & + 7,684 \varepsilon + \\
& + \{ 0,0379 \varepsilon (\zeta_1 + \zeta_6) + 0,0061 \varepsilon (\zeta_2 + \zeta_7) + 0,0221 \varepsilon (\zeta_2 + \zeta_4 + \zeta_6 + \zeta_8) + 0,0160 \varepsilon (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=5 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,13046 (\zeta_1 - \zeta_6) + 0,09225 (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=5 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,01173 (\zeta_1 - \zeta_6) + 0,00831 (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=20 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,00108 (\zeta_1 - \zeta_6) + 0,00077 (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=50 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,00028 (\zeta_1 - \zeta_6) + 0,00020 (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=100 \text{ m}} + \\
& + \{ -0,000015 (\zeta_1 - \zeta_6) - 0,000010 (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=1000 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,001747 (\zeta_6^2 - \zeta_1^2) + 0,001235 (\zeta_6^2 + \zeta_6^2 - \zeta_2^2 - \zeta_8^2) + 0,001300 (\zeta_4 \zeta_6 + \zeta_6 \zeta_8 - \zeta_6 \zeta_1 - \zeta_4 \zeta_8) + \\
& \quad + 0,000538 (\zeta_2 \zeta_6 + \zeta_6 \zeta_7 - \zeta_2 \zeta_3 - \zeta_7 \zeta_8) \}_{\rho=5 \text{ m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = & + 7,684 \kappa + \\
& + \{ 0,0379 \kappa (\zeta_2 + \zeta_7) + 0,0061 \kappa (\zeta_1 + \zeta_6) + 0,0221 \kappa (\zeta_2 + \zeta_4 + \zeta_6 + \zeta_8) + 0,0160 \kappa (\zeta_2 + \zeta_6 - \zeta_4 - \zeta_8) \}_{\rho=5 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,13046 (\zeta_2 - \zeta_7) + 0,09225 (\zeta_2 + \zeta_4 - \zeta_6 - \zeta_8) \}_{\rho=5 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,01173 (\zeta_2 - \zeta_7) + 0,00831 (\zeta_2 + \zeta_4 - \zeta_6 - \zeta_8) \}_{\rho=20 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,00108 (\zeta_2 - \zeta_7) + 0,00077 (\zeta_2 + \zeta_4 - \zeta_6 - \zeta_8) \}_{\rho=50 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,00028 (\zeta_2 - \zeta_7) + 0,00020 (\zeta_2 + \zeta_4 - \zeta_6 - \zeta_8) \}_{\rho=100 \text{ m}} + \\
& + \{ -0,000015 (\zeta_2 - \zeta_7) - 0,000010 (\zeta_2 + \zeta_4 - \zeta_6 - \zeta_8) \}_{\rho=1000 \text{ m}} + \\
& + \{ 0,001747 (\zeta_7^2 - \zeta_2^2) + 0,001235 (\zeta_6^2 + \zeta_8^2 - \zeta_1^2 - \zeta_3^2) + 0,001300 (\zeta_6 \zeta_7 + \zeta_7 \zeta_8 - \zeta_2 \zeta_3 - \zeta_3 \zeta_4) + \\
& \quad + 0,000538 (\zeta_6 \zeta_8 + \zeta_4 \zeta_1 - \zeta_4 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_2) \}_{\rho=5 \text{ m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^9 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = & - 0,48261 (\zeta_1 - \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_7)_{\rho=5 \text{ m}} - \\
& - 0,08194 (\zeta_1 - \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_7)_{\rho=20 \text{ m}} - \\
& - 0,03181 (\zeta_1 - \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_7)_{\rho=50 \text{ m}} - \\
& - 0,03077 (\zeta_1 - \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_7)_{\rho=100 \text{ m}} - \\
& - 0,00427 (\zeta_1 - \zeta_3 + \zeta_6 - \zeta_7)_{\rho=1000 \text{ m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = & + 0,24131 (\zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_6 - \zeta_8)_{\rho=5 \text{ m}} + \\
& + 0,04097 (\zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_6 - \zeta_8)_{\rho=20 \text{ m}} + \\
& + 0,01591 (\zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_6 - \zeta_8)_{\rho=50 \text{ m}} + \\
& + 0,01539 (\zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_6 - \zeta_8)_{\rho=100 \text{ m}} + \\
& + 0,00214 (\zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_6 - \zeta_8)_{\rho=1000 \text{ m}}
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen beziehen sich die Grössen ζ auf die unter den entsprechenden Klammern angegebenen Kreisradien. Die Werte für $\rho = 1000$ Meter sind aus der Karte zu entnehmen. Wir benützen solche im Maasstabe $\frac{1}{25000}$. In Fällen, wo diese ebenen Terrain angeben, kann dieses letzte Glied vernachlässigt werden.

Da aber die Gleichungen die Gesamtwirkungen bis zur Entfernung von 1000 Metern ausdrücken, also solche Werte ergeben, welche, nach den eingeführten Benennungen, der Terrainwirkung + der kartografischen Wirkung gleich sind, so erhalten wir die Terrainwirkung allein im allgemeinen nur nach Abzug der kartografischen Werte bis zu 1000 Metern.

Bei dieser Art der Berechnung bleiben manche störende Einflüsse, wie solche von Gräben, Dämmen, Strassenkörper u. s. w. unberücksichtigt. Wenn solche durch passende Wahl der Beobachtungsstation nicht ganz vermieden werden können, müssen sie für sich berechnet werden.

3. KARTOGRAPHISCHE WIRKUNG.

Die Berechnung jener Wirkungen, welche den in der kartografischen Zeichnung darstellbaren Bodenerhebungen und Senkungen entsprechen, kann viel einfacher ausgeführt werden. Durch Vernachlässigung von h neben ζ und ρ vereinfachen sich die Gleichungen 9.), wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -3 G \sigma \zeta \frac{d\rho \cos 2\alpha d\alpha}{\rho^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= + \frac{3}{2} G \sigma \zeta \frac{d\rho \sin 2\alpha d\alpha}{\rho^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= - \frac{3}{2} G \sigma \zeta^2 \frac{d\rho \cos \alpha d\alpha}{\rho^3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= - \frac{3}{2} G \sigma \zeta^2 \frac{d\rho \sin \alpha d\alpha}{\rho^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots 10.)$$

Die praktische Berechnung kann weiter auch dadurch besonders vereinfacht werden, dass wir sie nach Höhenschichten ausführen, wobei nur Werte von ζ in Betracht kommen, welche ganze Vielfache der Schichtenhöhe sind. Das sich um den Beobachtungsort weit erstreckende Gebiet wird ähnlich wie bei der Terrainwirkungsberechnung in radiale Segmente geteilt, aber in grösserer Zahl als dort. Bei unseren Berechnungen geschah diese Teilung in 36 Segmente. Eine weitere Einteilung des Gebietes durch Kreise ist aber hier nicht nötig, da die Werte von ρ als Entfernungen der Schichtenlinien abgemessen sich zur Berechnung besser eignen.

Die Genauigkeit eines solchen Verfahrens richtet sich nach der Genauigkeit der Karte, welche ihm zu Grunde liegt. In kleineren Entfernungen sind Karten von grossem Maassstabe und dichten Schichtenlinien erforderlich, während für grössere Entfernungen auch weniger detaillierte ausreichen. So wurde z. B. für die Beobachtungen in der Gegend von Arad, die weiter unten ausführlicher besprochen werden sollen, bis zur Entfernung von 12 Kilometern östlich vom Rande des Gebirges, Karten im Maassstabe $\frac{1}{25000}$ benützt, von dort bis zur Entfernung von 30 Kilometern aber solche im Maassstabe von $\frac{1}{75000}$, und noch weiter eine Landkarte $\left(\frac{1}{900000}\right)$. Die Abstände der Schichtenlinien waren hierbei 40 m.,

100 m., endlich 400 m. Bei der Berechnung wurde für die Dichte der gebirgsbildenden Gesteine der Mittelwert $\sigma = 2,6$ benützt.

Zu beachten ist, dass die kartografische Wirkung bezüglich der Grössen $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ auch für grössere Entfernungen von hundert oder einigen hundert Kilometern noch merkbare Werte erreicht.

4. NORMALE WIRKUNG.

Als Werte der normalen Wirkung sollen jene dienen, welche den Dimensionen des BESSEL'schen Ellipsoides und der HELMERT'schen Formel für die Beschleunigung der Schwerkraft entsprechen. Diese Werte sind:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

bezüglich der zwei anderen uns hier interessierenden Grössen für die Breiten von 40° bis 60° in folgender Tabelle zusammengestellt:

Φ	ρ_x	ρ_y	g	$+ 10^8 \frac{\partial g}{\partial x} = 10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x}$	$- 10^8 g \frac{1}{\rho_x} = 10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$	$- 10^8 g \frac{1}{\rho_y} = 10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$	$- 10^8 g \left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{\rho_y} \right) = 10^8 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$	$10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - 10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 10^8 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\omega^2$ $\omega^2 = 5,26$
40°	636111000	638620000	980,1457	8,0399	- 1540,84	- 1534,79	+ 6,05	+ 3086,19
41	636224000	638656000	980,2352	8,0831	1540,71	1534,84	5,85	3086,11
42	636331000	638694000	980,3252	8,1164	1540,59	1534,89	5,70	3086,04
43	636444000	638733000	980,4155	8,1398	1540,46	1534,94	5,52	3085,96
44	636554000	638767000	980,5059	8,1533	1540,33	1534,99	5,34	3085,88
45	636668000	638804000	980,5966	8,1568	1540,20	1535,05	5,15	3085,81
46	636780000	638842000	980,6872	8,1504	1540,08	1535,10	4,98	3085,74
47	636890000	638882000	980,7777	8,1341	1539,95	1535,15	4,80	3085,66
48	637003000	638920000	980,8680	8,1079	1539,82	1535,20	4,62	3085,58
49	637113000	638954000	980,9580	8,0718	1539,69	1535,25	4,44	3085,50
50	637223000	638993000	981,0475	8,0259	1539,57	1535,30	4,27	3085,43
51	637332000	639029000	981,1365	7,9703	1539,44	1535,35	4,09	3085,35
52	637442000	639067000	981,2248	7,9049	1539,32	1535,40	3,92	3085,28
53	637550000	639102000	981,3123	7,8300	1539,20	1535,46	3,74	3085,22
54	637659000	639136000	981,3990	7,7454	1539,07	1535,51	3,56	3085,14
55	637676000	639173000	981,4847	7,6517	1538,94	1535,56	3,38	3085,06
56	637867000	639204000	981,5693	7,5485	1538,83	1535,61	3,22	3085,00
57	637971000	639242000	981,6527	7,4364	1538,71	1535,65	3,06	3084,92
58	638072000	639277000	981,7349	7,3152	1538,59	1535,70	2,89	3084,85
59	638171000	639310000	981,8156	7,1851	1538,48	1535,75	2,73	3084,79
60	638271000	639343000	981,8949	7,0463	1538,37	1535,79	2,58	3084,72

5. ZUSAMMENSTELLUNG DER BEOBSACHTUNGSRÉSULTATE. DAS ARADER GEBIET.

Zweck dieser Schrift ist eine kurze Darstellung zu geben von der benützten Methode, und von der Art ihrer Verwertung. Diesem Zwecke glaube ich am besten dienen zu können, wenn ich statt der flüchtigen Aufzählung aller bisher gewonnenen Resultate, mich lieber auf eine eingehendere Behandlung eines Teiles derselben beschränke und so an einem Beispiele das Allgemeine erkläre. Dazu werden sich am besten die Beobachtungen eignen, welche im Arader Gebiete, und zwar hauptsächlich auf der sich bis Paulis und Világos erstreckenden Ebene ausgeführt worden sind. Dieses durch alluviale Aufschüttungen geebnete Gebiet gehört mit zur ungarischen Tiefebene und schmiegt sich im Osten an die in meridionaler Richtung abfallenden Ausläufer jenes Gebirgszuges an, welcher vom Siebenbürgischen Erzgebirge ausgehend zwischen Maros und Fehérkörös in ostwestlicher Richtung sich erstreckt. Die geologische Karte giebt in diesen Ausläufern archaische und ältere eruptive Massengesteine an. Der Hauptteil unserer Beobachtungen in diesem Gebiete geschah auf einem Flächenraum von circa 250 Quadratkilometern, auf welchem gegen hundert Stationen in der durchschnittlichen Entfernung von 2 Kilometern verteilt waren.

Die Resultate dieser Messungsreihe sind in der am Schlusse beigefügten Tabelle I zusammengestellt. Alle Werte darin sind auf den astronomischen Meridian bezogen. In der ersten Columnne stehen die fortlaufenden Zahlen der Stationen, deren Lage aus der Karte Fig. 7 zu ersehen ist. Die Bedeutung der anderen Columnnen bedarf ausser ihrer Aufschrift keiner weiteren Erklärung. Die Normalwerte sind aus der vorangehenden Tabelle entnommen, und zwar, für alle Stationen dieselben: die für die Breite von $46^{\circ} 10'$ gültigen Werte: $8,1 \cdot 10^{-9}$ für $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ und $4,9 \cdot 10^{-9}$ für $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$.

Von R und λ wird später die Rede sein.

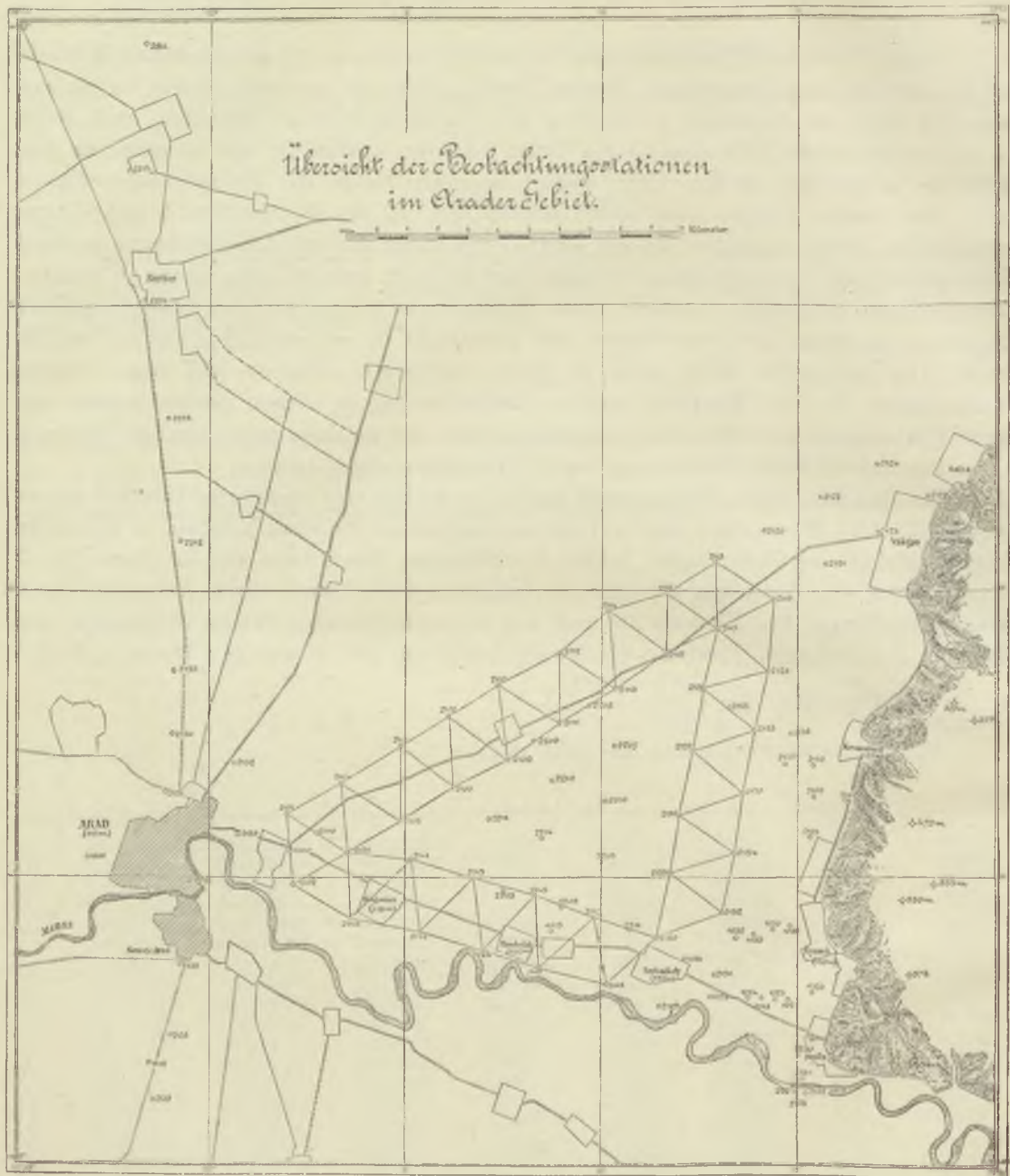


Fig 7.

Tabelle I. Resultate der Beobachtungen im Arader Gebiet.

Stationsnummer	Beobachtete volle Werte auf den astronomischen Meridian bezogen				Terrainwirkung				Topografische Werte = = Volle Wirkung. — Terrainwirkung				Topografische Störungswerte = = Topografische Wirkung — Normalwirkung				Kartografische Wirkung				Subterrane Störungswerte = = Topografische Störungswirkung — Kartogr. Wirkung				R	λ	Stationsnummer
	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$	$10^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_t$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_t$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_t$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_t$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^{III}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)^{III}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^{III}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^{III}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_k$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_k$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_k$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_k$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)^{IV}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)^{IV}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^{IV}$	$10^4 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^{IV}$							
14 Okt.—5 Nov. 1903.																											
1008	+20,3	— 2,3	+52,1	+7,2	+4,5	— 1,4	+1,3	+0,8	+15,8	— 0,9	+50,8	+6,6	+7,7	— 0,9	+45,9	+6,6	+0,1	0	+5,4	+0,7	+7,6	— 0,9	+40,5	+5,9	+52,5	+82,7	1008
1018	+32,9	+88,1	+37,0	+3,8	+2,1	— 3,0	+5,9	+1,6	+30,8	+91,1	+81,1	+5,4	+22,7	+26,2	+5,4	+5,4	0	— 0,4	+17,7	+5,8	+22,7	+91,5	+8,5	— 0,4	32,9	+80,4	1018
1018 b	+39,3	+86,8	+10,3	— 0,4	+1,4	— 3,5	— 0,7	+0,2	+37,9	+90,3	+11,0	— 0,6	+20,8	+90,3	+6,1	— 0,6	0	— 0,5	+18,6	+5,9	+29,8	+90,8	— 12,5	— 6,5	11,1	— 86,9	1018 b
1018 c	+32,3	+80,9	+34,0	+7,3	— 1,0	— 10,2	— 6,4	+2,0	+33,3	+91,1	+40,4	+5,3	+25,2	+91,1	+35,5	+5,3	— 0,1	— 0,4	+17,2	+5,8	+25,3	+91,5	+18,3	— 0,5	41,8	+82,7	1018 c
1020	+11,2	+36,5	+8,5	— 0,1	+0,2	+1,2	+3,1	+1,7	+11,0	+35,3	+5,4	— 1,8	+3,3	+35,3	+0,5	— 1,8	+0,3	— 0,4	+31,4	+3,1	+2,6	+37,3	+80,9	— 4,9	6,5	— 73,2	1020
1020 b	+18,1	+31,4	— 2,0	— 1,3	+6,7	+1,8	— 1,9	+1,1	+11,4	+29,6	— 0,1	— 0,2	+3,3	+29,6	— 5,0	— 0,2	+0,4	— 2,1	+29,6	+2,9	+31,7	— 37,5	— 37,5	— 2,8	0,4	— 38,0	1020 b
1021	+7,4	+39,4	— 16,0	— 4,1	— 2,3	+2,5	— 1,8	+0,8	+9,7	+30,9	+14,2	— 4,9	+1,6	+36,9	— 19,1	— 4,9	— 0,1	— 2,1	+25,0	+6,1	+37,7	— 44,1	— 44,1	— 11,0	17,2	— 102,1	1021
1021 b	+1,3	+34,5	— 20,9	— 4,9	+3,4	+2,7	— 0,9	+1,0	— 2,1	+31,8	— 20,0	— 3,9	+1,6	+31,8	— 24,0	— 3,9	— 0,1	— 0,9	+22,7	+6,0	+37,7	— 37,5	— 37,5	— 9,9	21,5	— 10,7	1021 b
1023	+38,0	+57,5	— 31,9	— 9,8	+6,3	+0,7	— 1,5	+0,8	+31,7	+59,2	— 21,1	— 2,7	+30,5	+59,2	— 26,0	— 2,7	— 0,1	— 0,6	+21,1	+6,1	+23,7	+57,4	— 56,4	— 16,7	37,1	— 17,4	1023
1023 b	+40,6	+61,6	— 20,0	— 1,8	+2,0	+2,4	+0,5	+0,9	+38,6	+69,2	— 21,1	— 2,7	+30,5	+59,2	— 26,0	— 2,7	0	— 0,6	+20,3	+6,0	+30,5	+59,8	— 46,3	— 8,7	21,8	— 7,2	1023 b
1024	+19,0	+71,0	+53,5	+9,1	— 12,3	— 0,4	+2,3	+0,6	+31,3	+71,4	+52,6	+7,2	+23,2	+71,4	+47,7	+7,2	0	— 0,3	+13,6	+5,7	+23,2	+71,7	+34,1	+1,5	54,5	+82,4	1024
1025	+41,6	+22,7	+67,1	+17,0	+13,9	— 0,5	+1,1	+2,0	+27,7	+23,2	+64,8	+16,4	+19,6	+23,2	+59,9	+16,4	0	— 0,2	+11,8	+4,6	+19,6	+23,4	+48,1	+11,8	72,6	+76,6	1025
1026	+20,7	+35,9	+73,1	+12,1	+0,4	+9,7	+2,7	+1,3	+15,5	+22,1	+58,2	+8,4	+7,4	+22,1	+53,3	+8,4	0	0	+10,1	+2,2	+7,4	+22,1	+43,2	+6,2	60,6	+82,0	1026
1026 b	+16,2	+19,7	+69,9	+5,7	+0,4	+2,5	+0,9	+0,4	+15,5	+22,1	+58,2	+8,4	+7,4	+22,1	+53,3	+8,4	0	0	+10,1	+2,2	+7,4	+22,1	+43,2	+6,2	60,6	+82,0	1026 b
1032	+25,8	+62,3	+79,8	+4,6	+5,4	— 2,5	— 0,9	+0,2	+17,3	+67,1	+29,4	+4,8	+9,2	+67,1	+24,5	+4,8	— 0,1	— 0,4	+22,1	+4,9	+9,3	+67,5	+40,3	— 9,7	30,9	— 81,0	1032
1035	+15,5	+69,8	+25,5	— 4,6	+1,8	— 0,7	— 5,7	+1,4	+6,2	+30,0	+45,1	— 2,2	+1,9	+30,0	+40,2	— 2,2	— 0,1	— 1,3	+38,2	+10,3	— 1,9	+31,3	+2,0	— 12,5	45,3	— 87,2	1035
1036	+4,6	+33,1	+39,4	— 0,8	— 1,6	+3,1	— 0,7	+0,8	+6,2	+34,8	+11,3	— 11,1	— 1,9	+34,8	+6,4	— 11,1	— 0,1	— 0,7	+27,9	+6,6	— 1,8	+35,5	— 21,5	— 17,7	24,9	— 58,5	1036
1037	+5,8	+34,1	+10,6	— 7,3	— 0,4	— 0,7	— 0,7	+3,8	+6,2	+34,8	+11,3	— 11,1	— 1,9	+34,8	+6,4	— 11,1	— 0,1	— 0,7	+27,9	+6,6	— 1,8	+35,5	— 21,5	— 17,7	24,9	— 58,5	1037
22 Jul.—25 Jul. 1905.																											
1600	— 2,9	— 8,0	+16,4	— 8,8	+3,8	— 0,4	+3,1	+0,5	+0,9	— 7,6	+13,3	— 9,3	— 7,2	— 7,6	+8,4	— 9,3	0	0	+3,3	0	— 7,2	— 7,6	+5,1	— 9,3	22,9	— 62,8	1600
1602	+17,8	— 11,3	+20,7	+5,2	+8,6	— 0,7	+2,4	+3,2	+9,2	— 10,6	+23,1	+8,4	+1,1	— 10,6	+18,2	+8,4	0	0	+3,3	— 0,2	+1,1	— 10,6	+14,9	+8,6	28,6	+72,0	1602
10 Aug.—22 Nov. 1906.																											
1000	— 7,5	+0,6	+20,7	+3,2	— 1,8	+6,4	— 1,1	+0,2	— 5,7	— 5,8	+21,8	+3,0	— 13,8	— 5,8	+16,9	+3,0	0	0	+3,5	— 0,1	— 13,8	— 5,8	+13,4	+3,1	22,6	+82,3	1000
2100	— 1,1	— 11,1	+14,8	+4,8	+3,2	+1,2	+0,3	+1,6	— 4,3	— 12,3	+14,5	+6,4	— 12,4	— 12,3	+9,6	+6,4	0	0	+3,6	— 0,1	— 12,4	— 12,3	+6,0	+6,5	19,3	+69,8	2100
2101	— 10,4	+4,4	+6,4	+2,9	+2,0	+2,0	+1,2	— 0,1	— 8,4	— 6,4	+7,6	+3,0	— 16,5	— 6,4	+2,7	+3,0	0	0	+3,6	— 0							

6. VERÄNDERUNGEN DER SCHWERKRAFTSBESCHLEUNIGUNG IN EINER NIVEAUFLÄCHE.

Wenn g die Schwerkraftsbeschleunigung bedeutet, so sind ihre Gradienten:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

deren Resultante, der totale Gradient, nach Grösse und Richtung durch gerade Linien grafisch darstellbar ist.

Für das Arader Gebiet ist diese Darstellung durch die Karte (Fig. 8, S. 366) verwirklicht und zwar bezieht sich diese auf die subterranean Störungswerte, welche von den topografischen Werten nur in der nächsten Nähe des Gebirges merklich abweichen. (Siehe Tabelle I).

Wären die Werte der Gradienten in allen Punkten der Niveaufläche bekannt, so würden sich auch endliche Werte der Veränderungen Δg durch Integration berechnen lassen. Annähernd, doch mit befriedigender Annäherung, lässt sich eine solche Rechnung dann ausführen, wenn die Beobachtungsstationen nahe genug zu einander liegen, um den Gradienten zwischen zwei benachbarten Stationen als lineare Function der Ortskoordinaten betrachten zu können. Die Zulässigkeit einer derartigen Berechnung lässt sich durch ihre Ausführung längs einer geschlossenen Linie erproben. Es soll ja für eine solche:

$$\int \frac{dg}{ds} ds = 0$$

So wurde beispielsweise die Rechnung für das Dreieck ABC unserer Karte ausgeführt. Die Summe der schrittweise für je zwei benachbarte Stationen berechneten Werte von Δg um das ganze geschlossene Dreieck gebildet, übersteigt dabei nicht den Wert von $1,8 \cdot 10^{-3}$, ist also geringer als zwei milliontel Teile des ganzen g . Die ganze 34 Kilometer lange Strecke enthält 21 Stationen. Im Falle noch dichter gelegener Stationen, besonders in jenem Teile des Gebietes, wo die Störungen grösser sind, würde das Resultat voraussichtlich noch günstiger ausfallen. Ähnliche Proben, welche ich für die Beobachtungen bei Versecz und im Fruska Gora-Gebiete anstellte, führten zu ebenso guten Ergebnissen.

Gestützt hierauf kann die Berechnung der endlichen Differenzen Δg in Angriff genommen werden.

So wurden in dem als Beispiel behandelten Falle die Differenzen der Beschleunigung $g - g_A$ zuerst für das Dreieck ABC bestimmt, und durch solche korrigierte Werte ersetzt, welche sich aus der gleichmässigen Verteilung des fehlerhaften Überschusses ergeben. Von diesen Dreiecken ausgehend konnten dann diese Differenzen für sämtliche Stationen des untersuchten Gebietes berechnet werden. Eine systematische Ausgleichung der Beobachtungen wurde bisher nicht ausgeführt, da ich dieselben noch nicht für ganz abgeschlossen erachte.

Die bis heute erzielten Resultate sind in der Tabelle II für $g - g_A$ zusammengestellt und auch in Form von Linien gleicher Beschleunigung (Isogammen) in die Karte (Fig. 8) eingetragen. Der Wertabstand zweier benachbarter Isogammen ist dabei gleich zwei Ein-

heiten von der Ordnung 10^{-8} C. G. S. gesetzt. Die zur Bestimmung der Isogammen dienenden Zahlen bedeuten die Differenzen $g - g_A$ in derselben Einheit ausgedrückt.

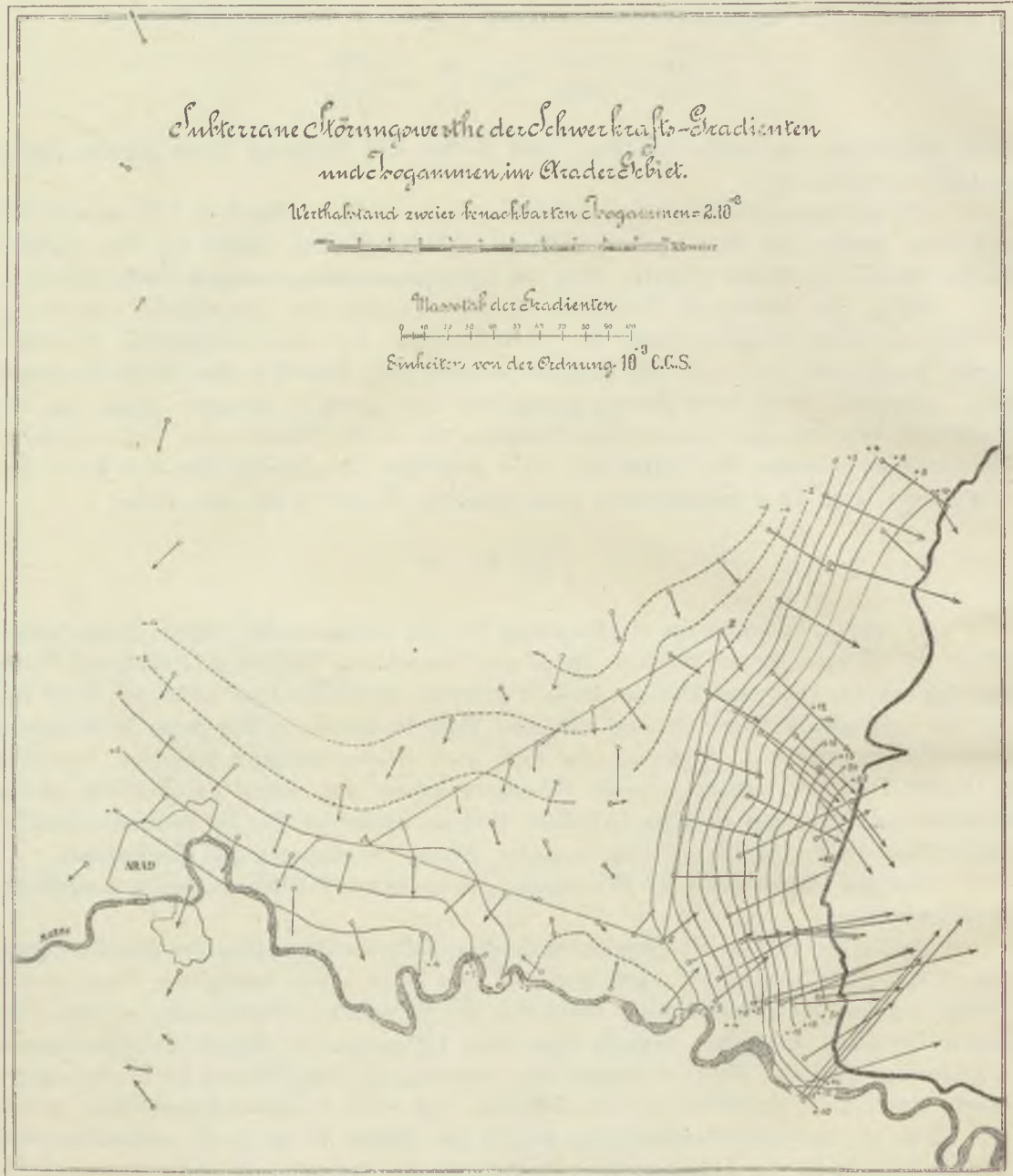


Fig. 8.

Tabelle II. Werte von $g-g_A$.

Stations- nummer	$10^3 (g-g_A)$	Stations- nummer	$10^3 (g-g_A)$	Stations- nummer	$10^3 (g-g_A)$	Stations- nummer	$10^3 (g-g_A)$	Stations- nummer	$10^3 (g-g_A)$
1008	— 1,9	2105	— 0,8	2125	+ 9,8	2145	— 1,5	2192	+ 11,0
1018	+ 11,1	2106	— 3,4	2126	+ 4,3	2146	— 2,6	2193	+ 8,6
1020	+ 19,3	2107	— 1,4	2127	— 0,4	2147	— 1,4	2200	+ 13,6
1021	+ 16,2	2108	— 3,7	2128	+ 8,6	2148	— 3,3	2201	— 0,9
1023	+ 14,3	2109	— 2,6	2129	+ 1,3	2149	— 3,6	2202	— 1,7
1024	+ 7,5	2110	— 5,3	2130	+ 9,1	2150	— 0,2	2203	— 0,9
1025	+ 1,8	2111	— 4,2	2131	+ 2,2	2151	+ 2,8	2204	— 0,6
1026	+ 0,8	2112	— 6,8	2132	— 1,3	2152	+ 7,9	2205	— 0,5
1032	+ 8,8	2113	— 4,9	2133	+ 1,7	2153	+ 2,0	2206	— 1,8
1035	+ 12,9	2114	— 7,8	2134	— 0,3	2154	+ 11,3	2207	— 3,1
1036	+ 17,9	2115	— 3,7	2135	— 2,4	2155	+ 2,2	2208	— 4,7
1037	+ 16,0	2116	— 5,8	2136	+ 5,6	2156	+ 12,4	2209	— 3,4
1600	+ 6,8	2117	— 2,9	2137	+ 9,5	2157	+ 14,4	2210	— 2,6
1602	+ 10,8	2118	— 6,0	2138	+ 10,5	2158	+ 8,6	2211	— 0,9
1000	+ 1,3	2119	0	2139	+ 9,9	2159	+ 17,7	2212	— 7,1
2100	+ 0,1	2120	— 5,0	2140	+ 3,6	2160	+ 20,8	2213	— 11,7
2101	— 0,4	2121	+ 5,5	2141	+ 0,6	2161	+ 23,2	2214	— 14,6
2102	+ 3,0	2122	0	2142	+ 4,3	2183	+ 21,7	2215	— 14,8
2103	+ 0,5	2123	+ 9,3	2143	0	2184	+ 12,5	2216	— 11,9
2104	— 3,0	2124	+ 4,7	2144	+ 1,2	2188	+ 9,3		

7. DREHWAGE UND PENDEL.

Unwillkürlich drängt sich nun die Frage auf, wie verhalten sich die Beobachtungen mit der Drehwage zu jenen mit dem Pendel?

Vor allem ist es augenfällig, dass sie sich gegenseitig ergänzen, denn da die Drehwage nur die Differenzen der Beschleunigung von einem Anfangswerte derselben anzeigt, so besteht noch immer die Notwendigkeit der Pendelbeobachtungen, um zur Kenntniss dieses Anfangswertes zu gelangen. Andererseits ist aber die Drehwage dazu berufen, Aufklärungen über den räumlichen Verlauf so kleiner Schwerkraftsänderungen zu geben, welche durch das Pendel kaum bemerkt oder nur angedeutet werden.

Der grösste Nutzen für beide Arten der Beobachtung kann aus ihrer gegenseitigen Kontrolle erwachsen. Da aber zur Bestimmung der Schwerkraftsdifferenzen bei Pendelbeobachtungen nur ein kleiner Bruchteil (etwa ein hunderttausendstel) der ermittelten Grösse benützt wird, während bei Beobachtungen mit der Drehwage die ermittelte Grösse in ihrem Ganzen hierzu dient, so scheint bezüglich dieser Kontrolle die Drehwage im Vorteile zu sein.

Deshalb glaube ich, dass auch der Widerspruch, der sich zwischen meinen Beobachtungen und den an denselben Orten ausgeführten Pendelbeobachtungen in zwei Fällen ergab, zufälligen Fehlern zuzuschreiben ist, welche bei Benützung der Pendel begangen wurden.

Über den ersten Fall einer solchen misglückten Kontrolle habe ich bereits in meinem dem Pariser phys. Kongresse 1900 eingerichteten Rapport berichtet. Ich habe dort auf die Abweichung hingewiesen, welche sich am Berge Ságh zwischen meinen Resultaten und den Pendelbeobachtungen des um die Schwerkraftsforschung so hoch verdienten Herrn Generals

VON STERNECK ergeben. Er fand dort abnormale Werte für die Beschleunigung, welche durch Massenanziehung allein nicht erklärt werden können, während meine Bestimmungen der Gradienten der sichtbaren Massenverteilung entsprechen.

Eine zweite noch günstigere Gelegenheit für eine solche Kontrolle erbot sich am Balaton (Plattensee), dessen Gebiet ebenfalls unter v. STERNECK's Leitung mit dem Pendel ausführlich untersucht wurde¹⁾. Während der Winter 1901 und 1903 begab ich mich mit meinen Apparaten auf die feste Eisdecke des Sees. Es ist dort möglich geworden in langen Winternächten eine Reihe von Beobachtungen anzustellen, welche frei von Einflüssen der unmittelbaren Umgebung sind, also keiner Korrektur wegen der Terrainwirkung bedürfen. Am Balaton ist dies um so mehr zulässig, da die Bodentiefe des Sees im ganzen grossen Umfange nahezu die gleiche ist. Im allgemeinen fand ich hier nur geringere Unregelmässigkeiten der Schwerkraft und zwar im westlichen Teile des Sees, solche, die mit v. STERNECK's Angaben für die angrenzenden Ufern leidlich übereinstimmen.

Im östlichen Teile dagegen weichen die Beobachtungen stark von einander ab. Während ich auch dort keine bedeutenderen Störungen fand, sollte laut v. STERNECK's Publikation zwischen den zwei am südöstlichen Ufer gelegenen Stationen Fonyód und Boglár, deren Entfernung weniger als zehn Kilometer beträgt, ein Unterschied in den Schwereabweichungen auftreten, welcher die Grösse von 51 Einheiten von der Ordnung 10^{-3} C. G. S. erreicht. Um dieser auffallend gross erscheinendem Schwerestörung nachzuspüren, habe ich nahe am Ufer an fünf Stationen zwischen Boglár und Fonyód Beobachtungen angestellt. Diese Stationen sind in der Karte (Fig. 9, S. 369) mit den Zahlen 1, 11, 13, 15 und 16 bezeichnet. Die Resultate sind:

Stations- nummer	Topografische Werte.		Topografische Störungs- werte.	
	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$	$10^9 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$
1	+ 12,3	+ 1,5	+ 4,2	+ 1,5
11	+ 19,2	+ 2,7	+ 11,1	+ 2,7
13	+ 18,4	+ 2,6	+ 10,3	+ 2,6
15	+ 10,6	+ 1,9	+ 2,5	+ 1,9
16	+ 8,8	+ 1,4	+ 0,7	+ 1,4

Die meinen Beobachtungen entsprechenden totalen Gradienten und auch ihre Komponenten in der Richtung Fonyód-Boglár sind auf der Karte Fig. 9 dargestellt, und zeigen eine bedeutende Abweichung von dem berechneten Werte des Gradienten, welcher sich aus

1) R. v. STERNECK, Relative Schwerebestimmungen in der Umgebung des Plattensees. Mittheilung des k. u. k. milit. Geogr. Institutes XXI. Bd. 1902.

v. STERNECK's Beobachtungen als Mittelwert für die Strecke Fonyód-Boglár ergibt. Dieser wäre gleich 51 Einheiten von der Ordnung 10^{-9} C. G. S., entsprechend dem Pfeile F-B unserer Zeichnung.

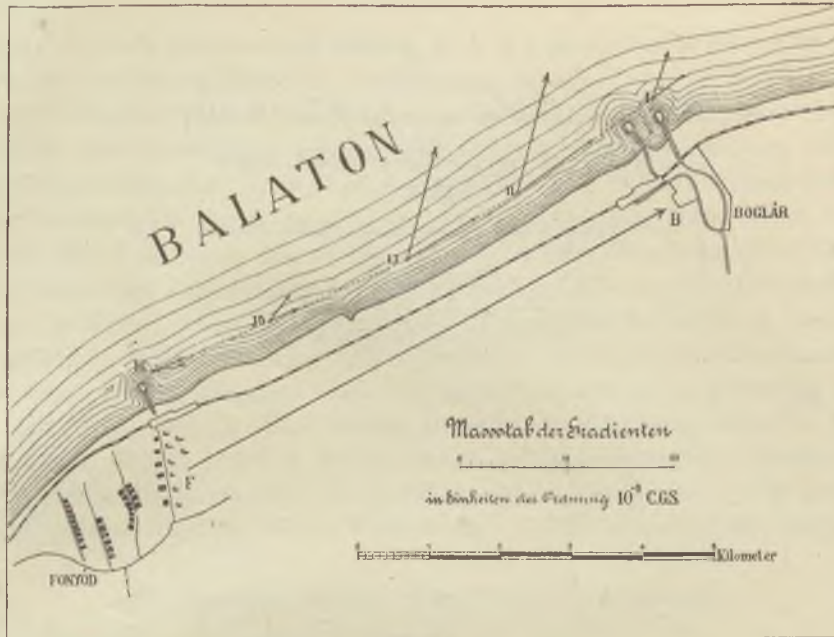


Fig. 9.

Dieser Unterschied tritt auch dann hervor, wenn die Differenz der Schwereabweichung zwischen Fonyód und Boglár auf Grundlage meiner Beobachtungen berechnet wird, da sich ihr Wert dann nahezu gleich $4 \cdot 10^{-3}$ ergibt, entgegen dem v. STERNECK'schen grossen Werte.

Ohne auf die möglichen Ursachen dieses auffallenden Widerspruchs zwischen den beiderartigen Beobachtungen näher einzugehen, will ich nochmals betonen, dass Pendel und Drehwaage bei der Untersuchung der Schwerkraftsverhältnisse Hand in Hand gehend sich gegenseitig unterstützen sollten.

8. DIE GRÖSSEN $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ UND $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, UND IHRE GRAFISCHE DARSTELLUNG.

Die Bedeutung der Grössen $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ bezüglich der Krümmungsverhältnisse der Niveaufläche ist schon vorher angedeutet worden. Setzen wir nun:

$$g \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = R$$

wo, da ρ_1 sich auf den kleineren Hauptkrümmungsradius bezieht, R die Bedeutung einer stets positiven Grösse hat, so wird:

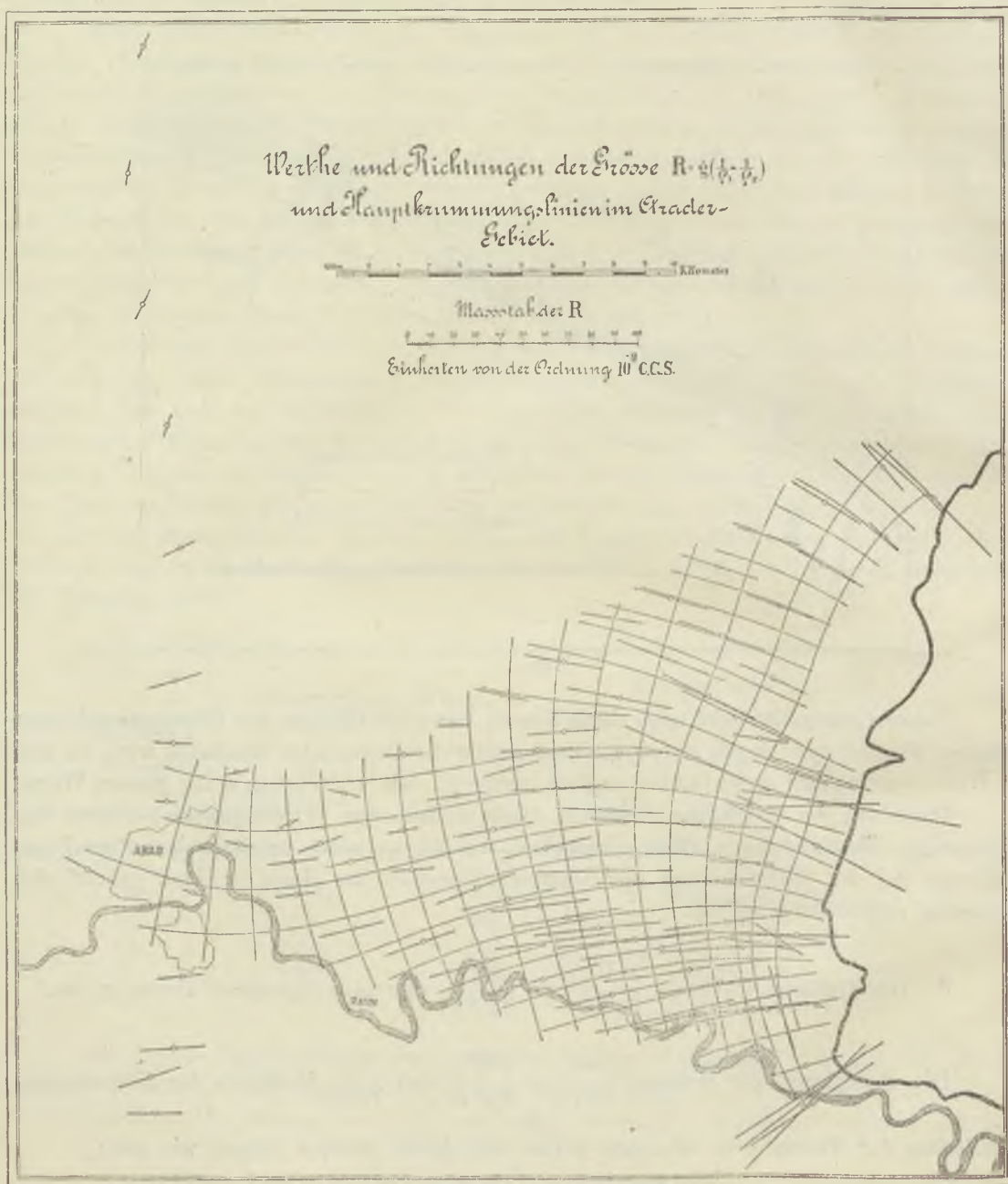


Fig. 10.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -R \cos 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} R \sin 2\lambda.$$

Diesen Formeln entsprechend können auch R und λ für alle Wertgattungen berechnet werden. In der die Arader Resultate enthaltenden Tabelle I sind in den letzten Columnen nur die topografischen Werte von R und λ mitgeteilt. Mit Hülfe dieser Grössen, welche sich zur grafischen Darstellung eignen, lässt sich ein gut übersichtliches Bild der Krümmungsverhältnisse herstellen. In der beiliegenden Karte (Fig. 10, S. 370) sind diese Grössen für jede Beobachtungsstation durch gerade Linienstücke dargestellt, deren Länge mit R proportional ist und deren Richtung dem Werte von λ entspricht. Die augenfällige Regelmässigkeit in der Richtung dieser Linienstücke erlaubte auch eine Reihe von Hauptkrümmungslinien in die Karte zu zeichnen. Zuerst jene, welche die Linienstücke R tangieren, also in der Richtung des grösseren Hauptkrümmungsradius verlaufen, dann die darauf normalen.

Auf diese Weise geschieht auch eine gewisse grafische Ausgleichung der Resultate bezüglich der Werte von λ . Eine solche grafische Ausgleichung kann für R auch durch Linien geschehen, welche gleichen Werten dieser Grösse entsprechen. Diesem Zwecke entsprechend entstand die Karte (Fig. 11, S. 372), welche die Werte von R im untersuchten Gebiete durch Linien darstellt, deren Wertabstand 10 Einheiten der 10^{-9} Ordnung beträgt.

9. BESTIMMUNG DER FORM EINER NIVEAUFLÄCHE.

Die Form der Niveaufläche ist durch die Grössen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

bestimmt, zwischen welchen für die Schwerkraft folgende Beziehung besteht

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung bedeutet.

Die Kenntniss der durch die Drehwaage bestimmbaren Grössen $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ist daher für sich allein noch unzureichend um diese Form zu ermitteln.

Wohl sind physikalische Methoden zu ersinnen, um diesem Mangel abzuhelfen. So kann die JOLLY'sche Methode zur Bestimmung von $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ dienen und es wäre möglich durch Vergleichung der Schwingungen langer und kurzer Pendel zur Kenntniss derselben Grössen zu gelangen. Auch könnte durch Beobachtungen an Pendeln, deren Trägheitsachsen zur

verticalen verschieden geneigt sind, die Grösse $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ in ähnlicher Weise bestimmt

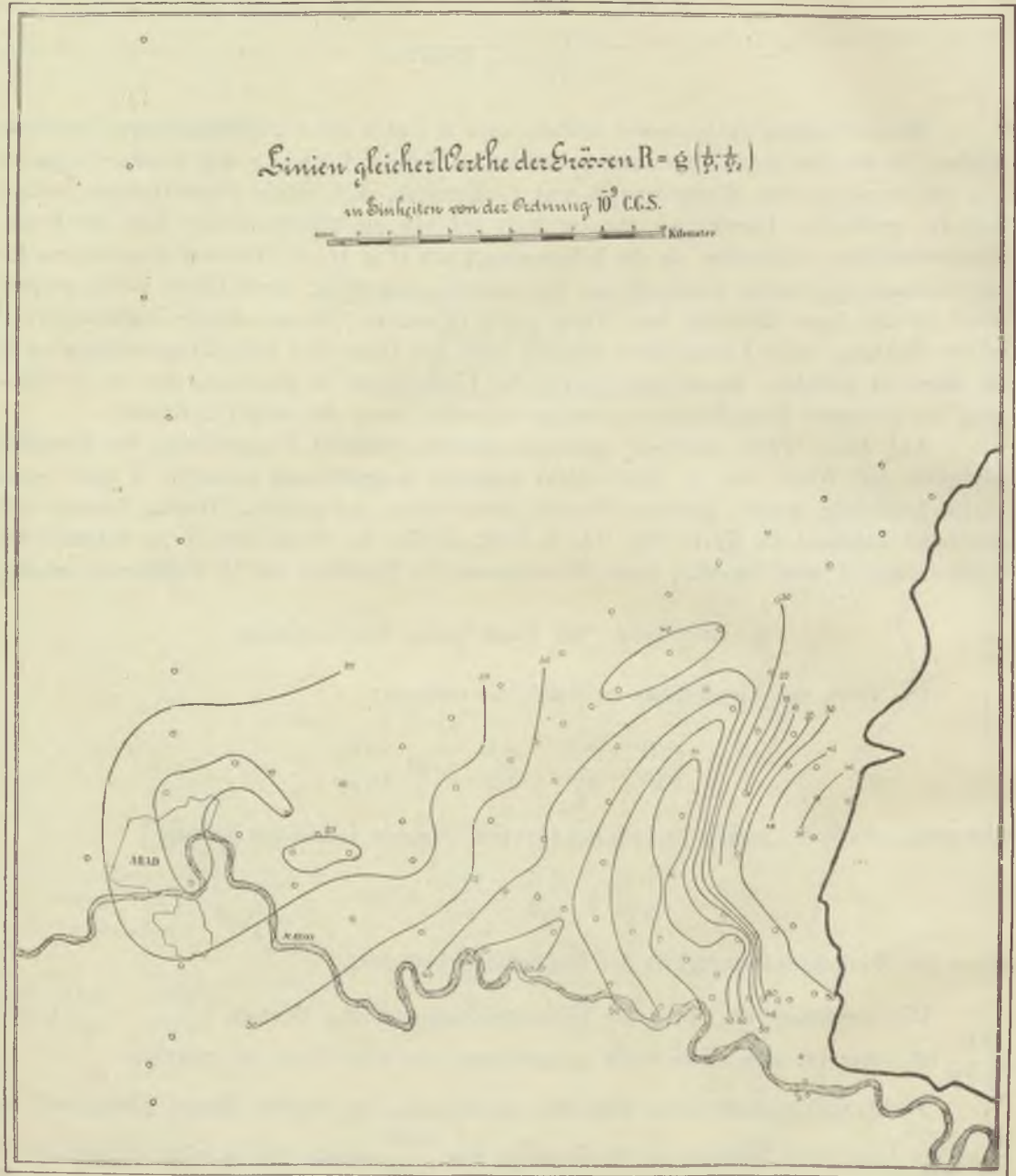


Fig. 11.

werden, wie dies mit der Drehwage betreffend der Grösze $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ geschieht.

Die JOLLY'sche Methode und die anderen hier angedeuteten Verfahren versprechen aber keine genügende Genauigkeit um unserem Zwecke zu dienen. Es sollen ja Werte von der Ordnung 10^{-9} ermittelt werden, und da der JOLLY'sche Wert rund 3000 Einheiten dieser Ordnung beträgt und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ noch um die Hälfte grösser ist, so müssten sie bis auf tausendstel Teile genau bestimmt werden, um sie zusammen mit den Angaben der Drehwage in Betracht ziehen zu können. Diese Genauigkeit ist noch lange nicht erreicht.

Es soll nun hier gezeigt werden, wie durch Zuhülfenahme geodetischer Messungen dem angedeuteten Mangel abzuhelpen ist, wie im besonderen die Kenntnis der mittleren Krümmung zwischen nur zwei Punkten des untersuchten Gebiets die Drehwagenbeobachtungen in der Weise ergänzt, dass Lotrichtungen und Krümmungen in allen Punkten des Gebiets bekannt werden.

Ich will mich auf den meinen Beobachtungen entsprechenden Fall beschränken, dass es sich um die Bestimmung eines nur kleinen Teiles der Niveaufläche handelt, dessen Ausdehnung in Länge und Breite den Bogen von einem halben Grad nicht übersteigt.

Für das ganze untersuchte Gebiet soll ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem ξ, η, ζ eingeführt werden, dessen Anfangspunkt in einem Punkte innerhalb des Gebiets liegt und dessen $\xi\eta$ Ebene in diesem Punkte mit der Horizontalebene xy zusammenfällt oder mit dieser einen sehr kleinen Winkel von der Ordnung der Lotablenkungen einschliesst. Die orthogonalen Projektionen von Punkten, welche auf der untersuchten Bodenfläche liegen, seien durch die Coordinaten ξ, η bestimmt. Es soll nun gezeigt werden, dass die Werte der Grössen $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}$ in diesem Punkten durch die beobachteten $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ersetzt werden können mit einer Annäherung, welche der Genauigkeit der Beobachtungen entspricht. Vorausgesetzt wird allerdings, dass das Terrain nicht zu sehr von der Ebene abweicht so, dass die Abstände der Bodenfläche von der $\xi\eta$ Ebene klein genug seien, um Veränderungen der Werte $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ innerhalb dieser Abstände vernachlässigen zu dürfen. Setzen wir nämlich:

$$\begin{array}{lll} \cos(x, \xi) = \alpha & \cos(x, \eta) = \beta & \cos(x, \zeta) = \gamma \\ \cos(y, \xi) = \alpha' & \cos(y, \eta) = \beta' & \cos(y, \zeta) = \gamma' \\ \cos(z, \xi) = \alpha'' & \cos(z, \eta) = \beta'' & \cos(z, \zeta) = \gamma'' \end{array}$$

so erhalten wir:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \alpha' + \frac{\partial U}{\partial z} \alpha'' \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial x} \beta + \frac{\partial U}{\partial y} \beta' + \frac{\partial U}{\partial z} \beta'' \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial U}{\partial x} \gamma + \frac{\partial U}{\partial y} \gamma' + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma'' \end{array} \right\} \dots 11.)$$

und dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (\beta'^2 - \alpha'^2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (\beta^2 - \alpha^2) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} (\beta''^2 - \alpha''^2) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} (\beta \beta' - \alpha \alpha') + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} (\beta \beta'' - \alpha \alpha'') + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} (\beta' \beta'' - \alpha' \alpha'') \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} (\alpha \beta' - \alpha' \beta) + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} (\alpha \beta'' + \alpha'' \beta) + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} (\alpha' \beta'' + \alpha'' \beta') + \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \alpha \beta + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \alpha' \beta' + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \alpha'' \beta'' \end{aligned} \right\} 12.)$$

Wenn nun $\delta \phi$ und $\delta \lambda$ die geographische Breitendifferenz und Längendifferenz zwischen dem Punkte ξ, η und dem Anfangspunkte bedeutet, so ist mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1 & \beta = -\sin \phi \delta \lambda & \gamma = \delta \phi \\ \alpha' = \sin \phi \delta \lambda & \beta' = 1 & \gamma' = \cos \phi \delta \lambda \\ \alpha'' = -\delta \phi & \beta'' = -\cos \phi \delta \lambda & \gamma'' = 1 \end{array}$$

Mit Hülfe dieser Werte geben die vorangehenden Gleichungen immer Aufklärung darüber, ob die erwähnte Vereinfachung zulässig ist. Der Fehler, welcher bei der Benützung dieser einfachen Beziehung sich bei den Arader Beobachtungen ergibt, bleibt immer unter der Einheit von der Ordnung 10^{-9} , also unter der Grenze der erreichten Genauigkeit.

Die Vernachlässigung einer geringen Neigung der $\xi \eta$ Ebene zur horizontalen, etwa von der Ordnung der Lotablenkungen, bedingt natürlich noch viel geringere Fehler.

Im weiteren Verlaufe sollen nun die Veränderungen des Potentials in der Ebene $\xi \eta$ untersucht werden. Wir setzen für Punkte dieser Ebene:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

und den Gleichungen 10.) entsprechend:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial U}{\partial z} \alpha'' = g \cos(z \xi) = g_{\xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{\partial U}{\partial z} \beta'' = g \cos(z \eta) = g_{\eta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= g \end{aligned}$$

wo g_ξ und g_η die Componenten der Beschleunigung g in der Richtung der ξ und der η bedeuten.

Der Winkel μ , den die Projection der Lotrichtung auf die Meridianebene ($\xi\xi$ Ebene) mit der ξ Achse bildet, ist dann:

$$\mu = \frac{g_\xi}{g} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

und der Winkel λ , den die Projection der Lotrichtung auf die erste Vertikalebene ($\eta\xi$ Ebene) mit derselben Achse bildet:

$$\lambda = \frac{g_\eta}{g} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial \eta};$$

dabei sollen μ und λ positive Werte annehmen, wenn sich das untere Ende des Lotes nach Norden resp. nach Osten richtet.

Der Abstand ζ eines Punktes der durch den Koordinatenanfangspunkt gelegten Niveaufläche von der $\xi\eta$ Ebene, ist dargestellt durch:

$$\zeta = - \frac{U - U_0}{g}$$

wo U_0 den Potentialwert im Koordinatenanfangspunkte bedeutet.

Es sollen nun diese die Niveaufläche darstellenden Grössen durch Beobachtungen mit der Drehwage, und durch Bestimmung der Polhöhendifferenz $\mu' - \mu$ zweier Punkte ermittelt werden, deren Entfernung in der Meridianrichtung abgemessen wurde.

Die Aufgabe wurde im Folgenden durch die Annahme wesentlich erleichtert, dass die Beobachtungsstationen dicht genug verteilt seien, um zwischen je zwei benachbarten eine lineare Veränderung der Grössen $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}$ annehmen zu dürfen.

Die Lösung kann dann in mehrfacher Weise geschehen. Das erste Verfahren, welches ich dazu anwendete, und der 15^{ten} Konferenz der Internationalen Gradmessung in Budapest mündlich mitzuteilen die Ehre hatte, wurde im Laufe der Berechnung der Arader Resultate, durch ein anderes ersetzt, welches als von den Beobachtungsfehlern weniger abhängig besser zum Ziele führt.

Sei es mir erlaubt hier eine kurze Darstellung beider Verfahren zu geben.

a. Lösung der Aufgabe durch schrittweise Ermittlung der Differenz $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)' - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)$ für zwei benachbarte Punkte.

Beobachtet wird in den Eckpunkten 1, 2, 3, 4 u. s. w. einer Zikzaklinie (siehe Fig. 12).

Die Werte von $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)$ werden durch lineare Interpolation aus den Punktwerten 1, 2, 3, für den Punkt I, aus den Werten 2, 3, 4 für II u. s. w. berechnet, wo I,

II, III nahe der Mitte der durch die Beobachtungsstationen gebildeten Dreiecke liegen. Zwischen je zwei solchen Punkten wie I und II werde ein ebenes Koordinaten-

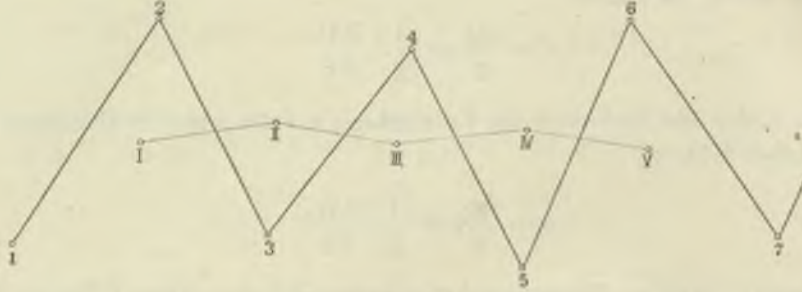


Fig. 12.

system s, n gelegt, so dass s in die Richtung ihrer Verbindungslinie, also von I zu II gerichtet, und n hierauf normal sei. Da nun:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}$$

so ist auch

$$\int_I^{II} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \right) ds = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_I,$$

und mit Hülfe der Beziehung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 2\omega^2$$

erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right)_I = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right)_I - 2 \int_I^{II} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \right) ds \quad 13.)$$

Die Werte für das Koordinatensystem ns werden mit Hülfe der Gleichungen 7 aus denen erhalten, welche für ein meridional gelegenes Koordinatensystem gelten. Die Richtungen von s und n , sowie die Koordinaten der Punkte in diesen Richtungen werden aus der benützten Karte genommen. Zur Bestimmung der Werte $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} \right)$ dienen die Differenzen der Werte in den Eckpunkten der betreffenden Dreiecke und die Coordinaten n dieser Punkte.

Von I zu II von da zu III u. s. w. fortschreitend kann man also die Differenz:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_s - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_I$$

für jeden Punkt N bestimmen, welcher mit dem Anfangspunkte I durch eine gehörige Anzahl von Zwischenpunkten verbunden ist.

Da nun in solchen Punkten $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)$ durch die Beobachtung bekannt ist und ausserdem die Beziehung $\Delta U = 2\omega^2$ besteht, so können für sie die Werte von $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}$ durch Formeln dargestellt werden, welche nur den einen unbekannten Wert: $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_I$ enthalten.

Durch Integration erhalten wir dann die Differenz der Lotrichtungen zweier Punkte nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\mu' - \mu &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)' - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{g} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} d\xi + \frac{1}{g} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} d\eta \\ \lambda' - \lambda &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)' - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{g} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\eta + \frac{1}{g} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} d\xi\end{aligned}$$

wo die rechten Seiten dieser Gleichungen nur die eine Unbekannte $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_I$ enthalten.

Wenn also $(\mu' - \mu)$, oder $(\lambda' - \lambda)$ durch astronomische Beobachtungen bestimmt wird, so kann auch diese Unbekannte berechnet werden. Die Aufgabe ist hierdurch gelöst.

Wird dieses Rechnungsverfahren auf ein geschlossenes Polygon angewendet, so bietet sich zur Beurteilung seiner Zuverlässigkeit eine mehrfache Kontrolle.

Die Summen um das ganze Polygon gebildet sollen nämlich folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}\sum \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)_k \right\} &= 0 \\ \sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_k \right\} &= 0 \quad \text{und} \quad \sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_k \right\} = 0\end{aligned}$$

dann soll noch:

$$\int \frac{\partial U}{\partial s} ds = 0.$$

Diese Rechnungsmethode, welche ich probeweise auf ein sehr enges Netz von Beobachtungen, in einem Zimmer des physikalischen Institutes, mit gutem Erfolge anwenden konnte, hat sich bei der Berechnung der Arader Beobachtungen als ungenügend erwiesen. Da nämlich diese Methode auf die Bestimmung der gewöhnlich kleinen Differenzen der Werte $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}$ gegründet ist, so bedarf sie so genauer und an so viel Stationen ausgeführter Beobachtungen, wie dies im Freien in einem grösseren Gebiete kaum möglich ist.

b.) Lösung der Aufgabe durch schrittweise Bestimmung der Differenzen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)' - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right).$$

Als Grundlage dienen Beobachtungen in Punkten 1, 2, 3, 4, u. s. w., welche, wie vorher (Fig. 12), in einer Zikzaklinie liegen.

Es seien a und b zwei benachbarte Punkte der $\xi\eta$ -Ebene und in dieser Ebene (s, n) ein ebenes Koordinatensystem, dessen eine Achse von a nach b gerichtet ist und n mit s in der Richtung des Uhrzeigers den Winkel $\frac{\pi}{2}$ bildet. Dann ist:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} ds = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_a,$$

und der Voraussetzung linearer Veränderungen entsprechend:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s} ds = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b \right\} s_{ab}$$

Indem wir dann den Winkel zwischen der Richtung $a \rightarrow b$ und der ξ -Achse mit α_{ab} bezeichnen, ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial \xi} \sin \alpha_{ab} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos \alpha_{ab}$$

und:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b \right\} s_{ab} = - \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a \right\} \sin \alpha_{ab} + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a \right\} \cos \alpha_{ab} \quad \dots 14.)$$

Betrachten wir nun ein zur Zikzaklinie gehöriges Dreieck a, b, c wie z. B. 1, 2, 3 oder 2, 3, 4 etc. Setzen wir der Kürze halber:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial s}\right)_b \right\} s_{ab} = T_{ab},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a = \xi_{ab},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a = \eta_{ab},$$

und benützen ähnliche Bezeichnungen bezüglich der Punktpaare bc und ca, so gelten für das Dreieck abc die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} T_{ab} &= -\xi_{ab} \sin \alpha_{ab} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ab}, \\ T_{bc} &= -\xi_{bc} \sin \alpha_{bc} + \eta_{bc} \cos \alpha_{bc}, \\ T_{ca} &= -\xi_{ca} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ca} \cos \alpha_{ca}, \quad \text{und} \\ \xi_{ca} &= -\xi_{ab} - \xi_{bc} \\ \eta_{ca} &= -\eta_{ab} - \eta_{bc} \end{aligned} \right\} \dots 15.)$$

Diese fünf Gleichungen reichen nicht aus zur Bestimmung der sechs Unbekannten. Im ersten der Berechnung unterzogenen Dreiecke 1, 2, 3 (siehe fig. 13) benütze ich aber einen der Werte, und zwar ξ_{12} dazu, um mit Hülfe dieses die anderen zu berechnen. Diese Grösse ξ_{12} , welche von nun an mit dem Buchstaben a bezeichnet werden soll, kann, wie gezeigt werden wird, durch Polhöhenbestimmungen ermittelt werden.

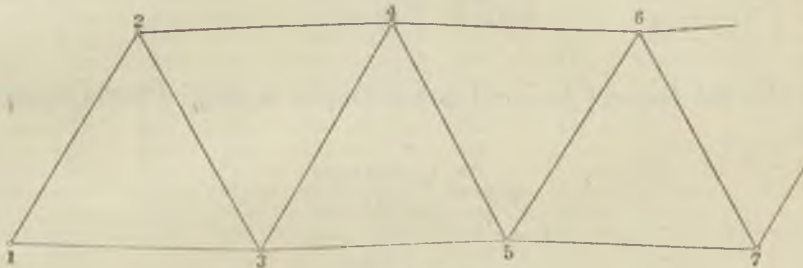


Fig. 13.

Der Gang der Rechnung ist nun der folgende. Gesetzt wird:

$$\xi_{12} = a.$$

.. Aus der 1^{sten} der Gleichungen 15.) folgt:

$$\eta_{12} = \frac{T_{12} + a \sin \alpha_{12}}{\cos \alpha_{12}}$$

und wir berechnen dann die Werte von ξ_{23} und η_{23} aus Formeln, welche den Gleichungen 15 entsprechen. Diese sind:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{bc} &= \frac{T_{bc} \cos \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \cos \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})} \\ \eta_{bc} &= \frac{T_{bc} \sin \alpha_{ca} + (T_{ca} - \xi_{ab} \sin \alpha_{ca} + \eta_{ab} \cos \alpha_{ca}) \sin \alpha_{bc}}{\sin (\alpha_{ca} - \alpha_{bc})} \end{aligned} \right\} \dots 16.)$$

Dann schreiten wir weiter, und indem in den Indexwerten $a=2$, $b=3$ und $c=4$ gesetzt wird, berechnen wir aus den Gleichungen 16.) die Werte ξ_{34} und η_{34} , dann $a=3$, $b=4$, $c=5$ gesetzt die Werte von ξ_{45} und η_{45} und so weiter.

Diese Art der Berechnung wurde für die Beobachtungen des Arader Gebiets tatsächlich ausgeführt und zwar für eine 91 Kilometer lange Zikzaklinie, welche mit 40 Stationen ein nahezu gleichschenkeliges Dreieck umschliesst. Dieses ganze geschlossene Dreiecksnetz ist auf der Übersichtskarte (Fig. 7) sichtbar gemacht.

Die Rechnung geschah mit jenem Systeme von Werten, welches wir topografische Störungswerte nannten, also ausgehend von den Werten $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)^{III}$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right)^{III}$.

Dementsprechend erhalten wir als Ergebniss der Rechnung auch solche Störungswerte für

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a^{III}$$

und

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a^{III}.$$

Wenn also mit $\Delta\mu$ und $\Delta\lambda$ die Lotablenkungen in einem Punkte bezeichnet werden, so sind diese:

$$\Delta\mu = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III},$$

und

$$\Delta\lambda = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III}$$

Die Rechnung führt also zur Bestimmung von:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\mu_b - \Delta\mu_a &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_b^{III} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_a^{III} \\ \Delta\lambda_b - \Delta\lambda_a &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_b^{III} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_a^{III} \end{aligned} \right\} \dots 17.)$$

d. i. zur Bestimmung der relativen Lotablenkungen.

Die Rechnungsergebnisse sind in der beifolgenden Tabelle III derart zusammengestellt, dass in der zweiten und dritten Columne die Wertdifferenzen für je zwei zu einem Linienstück gehörende Nachbarpunkte angegeben sind, während die fünfte und sechste Columne die Differenzen der einzelnen Stationswerte von gemeinsamen Anfangswerten enthält. Als solche Anfangswerte wurden gewählt für $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III}$ der Stationswert $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{2153}$ für $\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III}$

Tabelle III.

Linienstück	$10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_b^m - 10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_a^m$	$10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_b^m - 10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_a^m$	Stationsnummer	$10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_b^m - 10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_{2183}^m$	$10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_b^m - 10^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_{2108}^m$
a → b			2150	+	1,54 — 2,98 a + 33,28 + 13,94 a
2150—2148	+ 0,03 — 2,02 a —	8,15 — 2,22 a	2148	+	1,57 — 5,00 a + 25,13 + 11,72 a
2148—2147	— 1,69 + 2,92 a +	0,02 — 0,66 a	2147	+	0,12 — 2,08 a + 25,15 + 11,06 a
2147—2140	— 0,93 — 2,23 a —	8,55 — 2,46 a	2146	—	1,05 — 4,31 a + 16,60 + 8,60 a
2146—2145	— 0,55 + 3,29 a +	1,82 — 0,15 a	2145	—	1,60 — 1,03 a + 18,42 + 8,45 a
2145—2144	— 1,64 — 2,49 a —	8,10 — 2,30 a	2144	—	3,24 — 3,52 a + 10,32 + 6,15 a
2144—2143	+ 0,03 + 3,28 a +	1,89 — 0,53 a	2143	—	3,21 — 0,24 a + 12,21 + 5,62 a
2143—2142	— 2,82 — 2,34 a —	6,45 — 2,35 a	2142	—	6,03 — 2,58 a + 5,76 + 3,27 a
2142—2141	+ 2,22 + 3,16 a +	0,63 — 0,40 a	2141	—	3,81 + 0,58 a + 6,39 + 2,87 a
2141—2140	— 3,71 — 2,60 a —	7,19 — 2,71 a	2140	—	7,52 — 2,02 a — 0,80 + 0,16 a
2140—2103	+ 3,41 + 2,93 a +	0,80 — 0,16 a	2103	—	4,11 + 0,91 a 0
2103—2102	— 2,53 — 1,37 a —	6,26 — 2,47 a	2102	—	6,64 — 0,46 a — 6,26 — 2,47 a
2102—2101	+ 5,05 + 3,15 a —	0,11 — 0,34 a	2101	—	1,59 + 2,69 a — 6,37 — 2,81 a
2101—2103	— 2,52 — 1,78 a +	6,37 + 2,81 a	2103	—	4,11 + 0,91 a 0
2103—2104	+ 5,11 + 3,14 a —	0,53 — 0,28 a	2104	+	1,00 + 4,05 a — 0,53 — 0,28 a
2104—2105	— 1,92 — 1,68 a +	4,45 + 2,64 a	2105	—	0,92 + 2,37 a + 3,92 + 2,36 a
2105—2106	+ 3,68 + 3,35 a +	0,36 — 0,07 a	2106	+	2,76 + 5,72 a + 4,28 + 2,29 a
2106—2107	— 1,55 — 1,87 a +	4,97 + 2,39 a	2107	+	1,21 + 3,85 a + 9,25 + 4,68 a
2107—2108	+ 5,18 + 3,14 a —	0,03 — 0,20 a	2108	+	6,39 + 6,99 a + 9,22 + 4,48 a
2108—2109	— 2,77 — 1,91 a +	6,93 + 2,67 a	2109	+	3,62 + 5,08 a + 16,15 + 7,15 a
2109—2110	+ 4,85 + 3,25 a —	1,00 — 0,47 a	2110	+	8,47 + 8,33 a + 15,15 + 6,68 a
2110—2111	— 2,17 — 1,67 a +	8,18 + 2,84 a	2111	+	6,30 + 6,68 a + 23,33 + 9,52 a
2111—2112	+ 3,31 + 3,25 a —	0,48 — 0,04 a	2112	+	9,61 + 9,93 a + 22,85 + 9,48 a
2112—2113	— 2,49 — 1,78 a +	8,60 + 2,61 a	2113	+	7,12 + 8,15 a + 31,45 + 12,09 a
2113—2114	+ 3,96 + 3,60 a —	2,70 — 0,36 a	2114	+	11,08 + 11,75 a + 28,75 + 11,73 a
2114—2115	— 4,26 — 1,98 a +	9,60 + 2,63 a	2115	+	6,82 + 9,77 a + 38,35 + 14,36 a
2115—2116	+ 4,26 + 2,98 a —	2,78 — 0,05 a	2116	+	11,08 + 12,75 a + 35,57 + 14,31 a
2116—2117	— 5,06 — 1,84 a +	10,03 + 2,41 a	2117	+	6,02 + 10,91 a + 45,60 + 16,72 a
2117—2118	+ 5,47 + 3,18 a —	3,06 — 0,17 a	2118	+	11,49 + 14,09 a + 42,54 + 16,55 a
2118—2119	— 5,03 — 1,73 a +	10,40 + 2,76 a	2119	+	6,41 + 12,36 a + 52,94 + 19,31 a
2119—2117	— 0,89 — 1,45 a —	7,34 — 2,59 a	2117	+	6,02 + 10,91 a + 45,60 + 16,72 a
2117—2126	— 5,33 — 1,88 a +	9,30 + 2,34 a	2126	+	0,69 + 9,03 a + 54,90 + 19,06 a
2126—2127	+ 1,63 — 0,78 a —	8,45 — 2,94 a	2127	+	2,33 + 8,25 a + 46,45 + 16,12 a
2127—2128	— 4,72 — 1,90 a +	8,39 + 2,32 a	2128	+	2,39 + 6,35 a + 54,84 + 18,44 a
2128—2129	+ 2,68 — 0,90 a —	5,67 — 2,80 a	2129	+	0,29 + 5,45 a + 49,17 + 15,64 a
2129—2130	— 2,94 — 1,86 a +	6,10 + 2,30 a	2130	—	2,65 + 3,59 a + 55,27 + 17,24 a
2130—2155	+ 1,36 — 1,00 a —	6,26 — 2,93 a	2155	—	1,29 + 2,59 a + 49,01 + 15,01 a
2155—2154	+ 1,18 — 1,68 a +	6,90 + 2,53 a	2154	—	0,11 + 0,91 a + 55,91 + 17,54 a
2154—2153	+ 0,11 — 0,91 a —	8,80 — 3,01 a	2153	0	+ 47,11 + 14,53 a
2153—2152	+ 2,08 — 1,91 a +	7,34 + 2,43 a	2152	+	2,08 — 1,91 a + 54,45 + 16,96 a
2152—2150	— 1,26 — 1,07 a —	11,14 — 3,02 a	2150	+	0,82 — 2,98 a + 43,31 + 13,94 a

dagegen der Stationswert $\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{2103}$. Die Werte der fünften und sechsten Columne entsprechen daher den Lotablenkungen selbst bezogen auf ein BESSEL'sches Ellipsoid (E), für welches $\Delta\mu$ im Punkte 2153, $\Delta\lambda$ aber im Punkte 2103 gleich null wird.

Diese im allgemeinen willkürliche Wahl der Anfangswerte und des entsprechenden Ellipsoids (E) geschah dieser Weise, darum, weil die den Beobachtungen von $\left(\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \zeta}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \zeta}\right)$ entsprechende und in der Figur 8 dargestellte Massenanordnung es anzudeuten scheint, dass die Komponenten der Lotstörung in diesen Punkten tatsächlich klein sind. Punkt 2153 liegt nämlich über einem in westöstlicher Richtung sich erstreckenden Massenzuge, Punkt 2103 dagegen in grösserer Entfernung von den im Osten angehäuften störenden Massen.

Die Zulässigkeit der Rechnung lässt sich aus der Tabelle selbst beurteilen. Es müsste nämlich für die ganze geschlossene Linie sein:

$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_a \right\} = 0$$

$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_a \right\} = 0$$

oder was gleichbedeutend ist, die Werte im Punkte 2150 müssten dieselben sein, ob dieser als Anfangspunkt oder Endpunkt betrachtet wird. Die Tabelle zeigt, dass der Anfangswert und der Endwert der Grösse $\left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{2150}^{\text{III}} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{2153}^{\text{III}} \right\}$ nur um $0,72 \cdot 10^{-3}$ von einander abweichen, dieselbe Abweichung zwischen den zwei Werten von $\left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{2150}^{\text{III}} - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{2103}^{\text{III}} \right\}$ beträgt dagegen $10,03 \cdot 10^{-3}$. In den Werten der Lotablenkungen entsprechen diesen Abweichungen Fehler von $\frac{1}{5}$ Sekunden und von 2 Sekunden.

Gewiss könnte durch Benützung eines dichteren Beobachtungsnetzes der Grundbedingung linearer Veränderungen besser genügt werden, und so eine noch befriedigendere Übereinstimmung erzielt werden. Ich betrachte es für eine meiner nächsten Aufgaben diese wünschenswerte Ergänzung zu bewerkstelligen, wobei dann auch die zur Bestimmung der Grösse a durch Polhöhenbeobachtungen in Angriff genommen werden soll.

Eine weitere wertvolle Kontrolle des hier angegebenen Verfahrens bietet für geschlossene Beobachtungslinien die Beziehung

$$\int \frac{\partial U}{\partial s} ds = 0.$$

Diese Probe ist umso nützlicher, da sie schon auf das erste Dreieck anwendbar ist und

bei jedem folgenden Schritte zur Entscheidung dienen kann, ob dabei der Bedingung linearer Veränderungen genügt wurde.

Leider konnte hierauf im Verlaufe der Arader Beobachtungen noch keine Rücksicht genommen werden, da der Gedanke der dargelegten Berechnungsart erst später erstand.

Nichtsdestoweniger ergibt die nachträgliche Rechnung für die einzelnen Dreiecke keinen bedeutenden Fehler. Dieser erreicht für einige Dreiecke die Grösse von 150 C. G. S. und für die ganze 91 Kilometer lange Zikzaklinie die Grösse von 1420 C. G. S. Es sind dies Arbeitsgrössen entsprechend der Hebung des Gewichtes von einem Gramm um 0,15 cm. resp. 1,44 cm.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe ist noch die Bestimmung der Grösse a (s. Tabelle) erforderlich. Diese ergibt sich, wie schon erwähnt, aus der relativen Lotablenkung zweier Punkte mit Benützung einer der Formeln 17.), von welchen die erste von überwiegend praktischer Bedeutung ist.

Dieser letzte Teil der Arbeit ist in den von mir und meinen Mitarbeitern untersuchten Gebieten noch nachzuhohlen.

Wenn dies geschehen und die Werte von $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ ermittelt sind, so können durch Rechnung einerseits die Werte der Grössen $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, andererseits der Wert des Potentials U berechnet werden. Ja wir können auch noch zur Kenntniss derselben Grössen in einer benachbarten Niveaufläche gelangen, da

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right), & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right).\end{aligned}$$

In geschlossenem Raume habe ich auch diese letzten Beziehungen einer Probe unterworfen, indem ich aus Beobachtungen, welche in einer um 70 cm. über dem Fussboden liegenden horizontalen Ebene ausgeführt wurden, die Werte für eine um 30 cm. höher, gelegene Horizontalebene berechnete, und dann mit den Resultaten verglich, welche die Beobachtungen in dieser höher gelegenen Ebene unmittelbar ergaben. Die Übereinstimmung war der Genauigkeit der Beobachtungen entsprechend.

10.) GRAFISCHE DARSTELLUNG EINER NIVEAUFÄCHE.

Wenn auch meine Beobachtungen bis zur Stunde noch in keinem Gebiete zum vollen Abschluss gelangt sind, so will ich doch schon jetzt am Beispiele des best erforschten Arader Gebiets zeigen, wie die gewonnenen Kenntnisse bezüglich der Niveaufläche auch

grafisch dargestellt werden können. In Ermangelung beobachteter Werte der Lotabweichung, müssen diese hier durch Annahmen ersetzt werden, welche der Massenverteilung entsprechend, als wahrscheinlich erscheinen.

Um die Rechnung zu erleichtern, wurde das Beobachtungsnetz durch ein quadratisches Netz ersetzt, welches durch die in meridionaler Richtung verlaufenden Colonnenlinien I, II, III, u. s. w. und durch die darauf normalen Zonenlinien 1, 2, 3, etc. gebildet wird. (s. Fig. 14 und Fig. 15).

Für die Eckpunkte dieses quadratischen Netzes wurden die Werte von $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)^{III}$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right)^{III}$ aus den Werten der benachbarten Stationspunkte durch lineare Interpolation bestimmt. Mit Hilfe dieser Werte lassen sich dann die Grössen $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III}$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III}$ in der vorhin angegebenen Weise berechnen, wobei der Umstand, dass nur die Winkelwerte $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ auftreten, eine bedeutende Vereinfachung gewährt.

Um veranschaulichen zu können, in welcher Weise der noch zu beobachtende Wert einer zwischen zwei Punkten bestehenden relativen Lotabweichung die Darstellung der Niveaufäche beeinflusst, sind die Rechnungen mit zwei verschiedenen angenommenen Werten derselben ausgeführt. Zwischen den Punkten Zone 12 Col. XV (C) und Zone 4 Col. XII (B) wurde die meridionale Komponente der relativen Lotablenkung einmal zu 4,7 Sec., dann zu 3 Sec. angenommen. Die berechneten Werte, wie sie der ersten Annahme entsprechen, sind in der Tabelle IV zusammengestellt.

Die Komponenten der Lotablenkung selbst (bezogen auf das Normalellipsoid E) erhalten wir dann in Winkelmaass ausgedrückt durch Division mit $g \cdot 4,8 \cdot 10^{-6} = 4,7 \cdot 10^{-3}$, so dass die Zahl, welche in Einheiten der 10^{-3} Ordnung die Werte der Grössen $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ ausdrückt durch 4,7 dividirt die entsprechende Lotablenkung in Sekunden anzeigt.

Die Resultante der Komponenten $\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III}_{2153}\right\}$ und $\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III}_{2103}\right\}$ konnte nun in der Karte Fig. 14 ihrer Richtung und Grösse nach an den betreffenden Punkten eingetragen werden. Diese Resultante ist in der Karte mit $\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^{III}$ bezeichnet.

Dasselbe geschah, der zweiten Annahme entsprechend, für die relative Lotablenkung von 3 Secunden zwischen B und C, auf der Karte Figur 15.

Die Karten enthalten auch einige ausser dem quadratischen Netze gelegenen Punkte, welche in der Tabelle, um deren Übersichtlichkeit nicht zu stören, keine Aufnahme fanden.

Eine gut übersichtliche Darstellung erhielt ich noch auf folgendem Wege. Ich berechnete die den Werten $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^{III}_{2153}$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III} - \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^{III}_{2103}$ entsprechenden Potentialdifferenzen $U^{III} - U^{III}_{2103}$, welche als Störungen des Potentialwertes mit ΔU be-

Tabelle IV.

	Col. I	Col. II	Col. III	Col. IV	Col. V	Col. VI	Col. VII	Col. VIII	Col. IX	Col. X	Col. XI	Col. XII	Col. XIII	Col. XIV	Col. XV	Col. XVI
Zone 12	A B														19,21 — + 18,95 + 15,60	
Zone 11	A B														15,63 — + 10,70 + 17,40	
Zone 10	A B														12,92 — + 10,09 + 17,10	
Zone 9	A B														9,65 — + 7,40 + 16,73	
Zone 8	A B														7,48 — + 5,11 + 18,01	
Zone 7	A B														7,04 — + 4,95 + 18,77	
Zone 6	A B														8,48 — + 1,34 + 18,81	
Zone 5	A B														7,59 — + 1,16 + 20,17	
Zone 4	A B														6,18 — + 1,03 + 1,83	
Zone 3	A B														4,06 — + 0,86 + 6,00	
Zone 2	A B														1,32 — + 0,74 + 9,48	
Zone 1	A B														2,77 — + 0,69 + 22,17	

$$A = 10^4 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^m - 10^4 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^{m+1}$$

$$B = 10^4 \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^m - 10^4 \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^{m+1}$$

zeichnet werden sollen. Die jedem Punkte entsprechenden Werte von ΔU sind in die



Fig. 14.

Karte eingetragen, und es wurden auch die Linien gleicher ΔU in Wertabständen von 2 Einheiten von der Ordnung 10^3 C. G. S. gezeichnet.

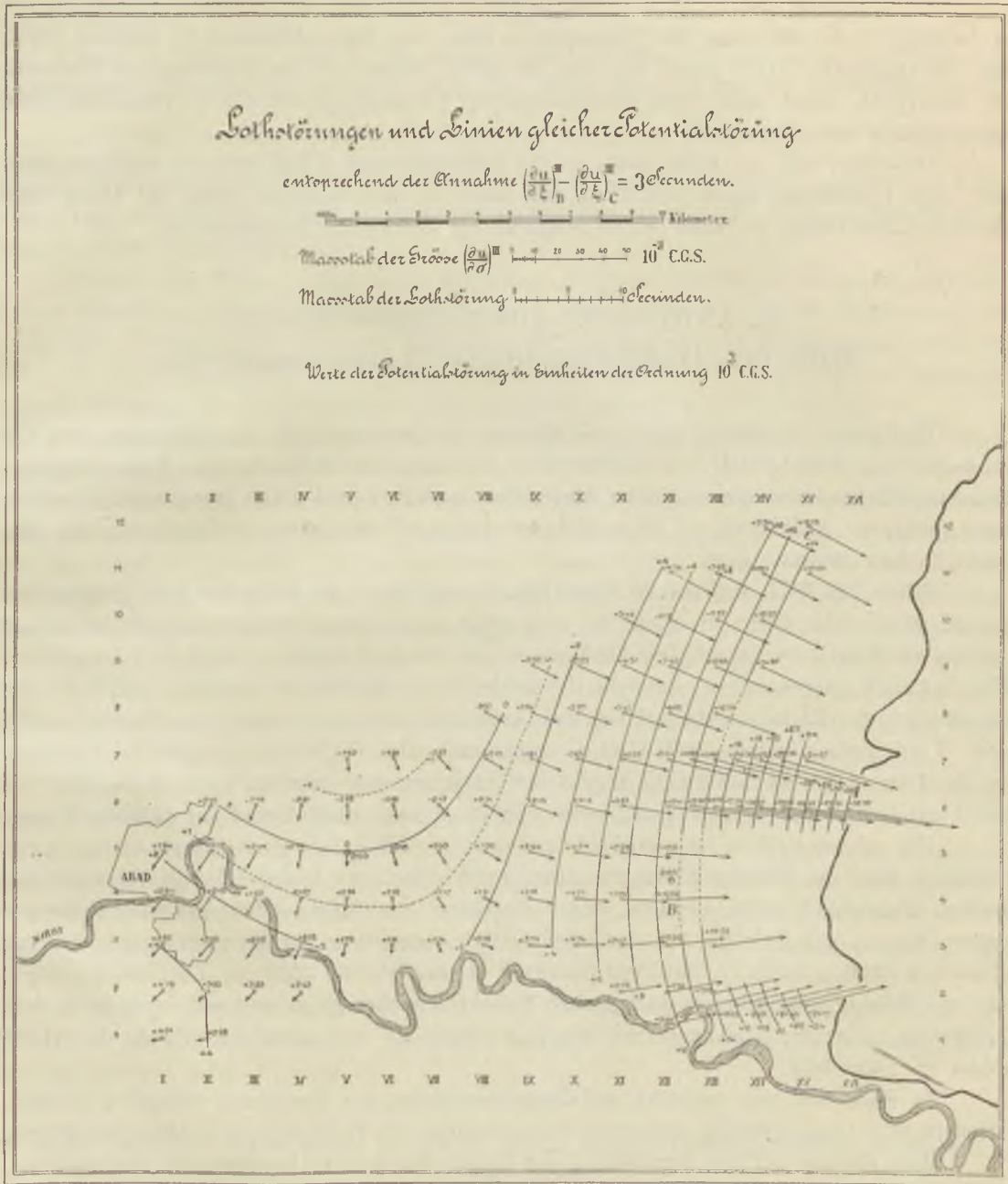


Fig. 15.



Setzen wir dann:

$$h = \frac{\Delta U}{g},$$

so bedeutet h die Erhebung der Niveaufläche über dem Normalellipsoid E , welches durch den Anfangspunkt 2103 gelegt ist und die Zahl, welche ΔU in Einheiten der Ordnung 10^3 ausdrückt, misst auch diese Erhebungen in Centimetern mit einer Vernachlässigung von ungefähr zwei Procenten.

Bemerken will ich noch, dass, da die Beobachtungen selbst noch zu ergänzen sind, auch ihre Darstellung keine endgültige sein kann, so dass derselben mehr der Wert einer übersichtlichen Skizze als einer genau ausgeführten Zeichnung beizulegen ist.

III. ANWENDUNG AUF UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE MASSENVERTEILUNG IN DER ERDKRUSTE.

Die grosse Empfindlichkeit, mit welcher die Drehwage alle Abweichungen von der konzentrischen Kugelgestalt der Erdoberfläche und auch der im Inneren der Erde gelegenen Trennungsflächen verschieden dichter Materialien anzeigt, macht dieses Instrument besonders dazu geeignet, Aufklärungen über Massenverteilungen zu geben, welche auch für den Geologen von Interesse sind.

Schon das Bild, welches die Karte Fig. 8 zeigt, kann als Beleg für diese Behauptung dienen. Man sieht dort, wie sich das von Osten herziehende Gebirg unter die alluvialen Gebilde vertieft, ja es ist möglich auch die Grösse dieser Vertiefung annähernd anzugeben. Wird nämlich angenommen, dass die durchschnittliche Dichte der Gesteine $= 2,7$ die der daraufliegenden Alluvialgebilde $= 2,0$ ist, dann entspricht (nach der Formel $\Delta g = 2\pi G(\sigma' - \sigma)h$) einer Verringerung $\Delta g = 0,001$ C.G.S. annähernd eine Vertiefung des dichten Gesteines um 38 Metern. Die um 0,002 C.G.S. abstehenden Isogammen erhalten so die Bedeutung von Schichtenlinien, welche der Höhendifferenz von 76 Metern entsprechend auf einander folgen.

Ein solcher Schluss ist natürlich nur insofern zulässig, als die Annahme als berechtigt erscheint, dass die Schwerestörungen allein durch diese eine Dichtedifferenz hervorgerufen werden. Tatsächlich scheinen aber schon in diesem angeführten Beispiele auch tiefer gelegene Massen mitzuwirken, da das regelmässige Anwachsen der Beschleunigung von der nördlichen Station 2215 in südlicher Richtung bis zur Station 2238 die Vermutung zulässt, dass die Faltung des Gebirges auch östlich von Arad weiter zieht, und sich noch in grosser Entfernung unter der Tiefebene fortsetzt, ja vielleicht an dem westlichen Rande des Alföld wieder zu Tage tritt.

Es wäre aber sehr verfrüht, auf Grund des bisher zur Verfügung stehenden mangelhaften Beobachtungsmaterials derartigen Vermutungen den Wert strenger Schlüsse beizulegen.

Mich diesmal auf eine Darstellung der Empfindlichkeit des Instrumentes beschränkend, will ich hervorheben, dass diese je nach der Lage der anziehenden Massen bald in dem

Werte der Gradienten $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$, bald in den die Krümmung bestimmenden Werten $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, auffallender zu Tage tritt.

So z. B. folgt aus einfacher Rechnung, dass im Falle einer sich unter dem Beobachtungsorte weit erstreckenden geneigten Ebene, an deren beiden Seiten die Dichtedifferenz von $\sigma' - \sigma = 0,7$ (wie vorher) besteht, der Wert des Gradienten $\frac{\partial g}{\partial s}$ die messbare Grösse einer Einheit der Ordnung 10^{-9} schon dann erreicht, wenn der Neigungswinkel annähernd 12 Minuten, und somit die Erhöhung 3,5 Meter pro Kilometer beträgt. Die Krümmungsdifferenzen sind in diesem Falle gleich null.

Seitlich in nahezu horizontaler Richtung gelegene Massen bewirken dagegen nur kleine Abweichungen der Verticalbeschleunigung, während sie in den die Krümmung bestimmenden Werten noch für grosse Entfernungen fühlbar bleiben. Diese betreffend berechnet sich z. B. die Wirkung der oberirdischen (sichtbaren) Massen der Alpen für den Beobachtungsort München zu 6, für Stuttgart noch zu 2 Einheiten der 10^{-9} Ordnung.

Es soll nun die Leistungsfähigkeit der Drehwage mit jener des Pendels aus allgemeinem Gesichtspunkte verglichen werden.

Die Erdkruste betrachten wir als von Massen verschiedener Beschaffenheit zusammengesetzt. Platten grösserer oder kleinerer Ausdehnung und Dichte sind da aneinander und übereinander gelagert. Längs der Grenzen dieser Platten finden wir Senkungen, Faltungen, Brüche kurz alles das, was zur Bildung tektonischer Linien gehört. Dazwischen können stellenweise auch grössere Massenergüsse, vielleicht auch Hohlräume vorkommen.

In der gesammten Anziehung all dieser Massen verrät sich die einzelne Masse nur durch die Abweichung ihrer Dichte von der ihrer Umgebung. Wir sind berechtigt anzunehmen, dass diese Dichtedifferenzen im Inneren der das Magma umgebenden Kruste Werte von einigen Zehnteln erreichen, dass auch grössere als 0,5 und darüber vorkommen.

Berechnen wir nun in einfachen Beispielen den Einfluss solcher unter der zugänglichen Oberfläche gelegenen Krustenstücke auf die beobachtete Schwerkraft.

Erstes Beispiel. Stufenförmige Erhebung der dichteren Masse, wie sie Fig. 16 veranschaulicht. In dieser Zeichnung, welche einen verticalen und normalen Querschnitt der Stufe darstellt, bezeichnet FF' die ebene und horizontale Erdoberfläche, C₀CBB' die obere Grenze der dichteren Masse. Die Störung bewirkt somit die Platte zwischen den Ebenen BB' und CC', welche sich nach rechts bis zu grossen Entfernungen erstrecken soll.

Dieser Massenordnung entspricht eine Störung der Beschleunigung, welche von F' über O nach F' zu anwächst, und ihren grössten Wert rechts von O in grosser Entfernung erreicht. Diese Störung ist

$$\Delta g = 2\pi G (\sigma' - \sigma) D$$

wo D die Dicke der Platte (Höhe der Stufe) und G die Gravitationsconstante bedeutet.

Leicht berechnet sich auch der Gradient $\frac{dg}{ds}$ in auf die Stufe normalen Richtung;

est ist nämlich:

$$\frac{dg}{ds} = 2G(\sigma' - \sigma) \log \frac{r_2}{r_1}$$

Dieser Gradient wächst also von F bis O und nimmt nach dem dort erreichten Maximum von O bis F' wieder ab.

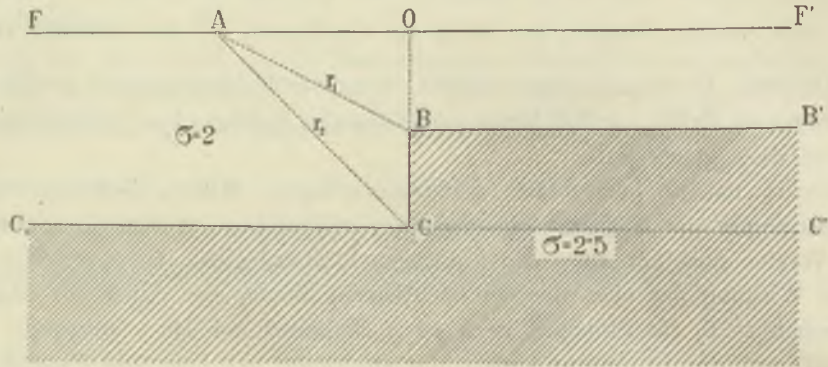


Fig. 16.

Das Pendel ist demnach wohl dazu berufen die Anwesenheit dichter Massen anzuzeigen, die Erforschung ihrer Grenzen, also der tektonischen Linien ist aber eine Aufgabe, welche mehr der Drehwaage zufällt.

Wie entsprechen nun diese beiden Instrumente ihrer Bestimmung?

Sei z. B. die Höhe der Stufe = 0,5 Kilometer, und die Dichtedifferenz $\sigma' - \sigma = 0,5$. Es wird dann (unabhängig von der Tiefenlage)

$$\Delta g = 0,01 \text{ C. G. S.}$$

Also etwa ein Hunderdtausendstel von g , eine Grösse, welche nahe der Grenze der Empfindlichkeit des Pendels liegt, jedenfalls mit diesem Instrumente nur mit besonderer Sorgfalt bestimmt werden kann.

Die Drehwaage hat in demselben Falle ein viel leichteres Spiel. Sie kann die Anwesenheit der Stufe bis zu grossen Tiefen (OB) = C durch Wirkungen verraten, welche ihre Empfindlichkeitsgrenze (1.10^{-9} für $\frac{dg}{ds}$) weit übersteigen. Folgende kleine Tabelle ergibt die Werte der $\frac{dg}{ds}$ für verschiedene Tiefen (C.)

Tiefe OB = C.	$10^9 \frac{dg}{ds}$
10 Meter . . .	268
100 Meter . . .	119
1 Kilometer .	27
10 Kilometer .	3,3
30 Kilometer .	1,1

Eine solche isostatische Lagerung ist durch die Fig. 17 dargestellt. Eine plattenförmige feste Scholle bedeckt mit Massen geringerer Dichtigkeit liegt auf sich weit aus-



Durch wiederholte Anwendung der schon im vorangehenden Beispiele gegebenen Formel kann der Gradient $\frac{dg}{ds}$ berechnet werden. Das Resultat dieser Rechnung ist in der Figur durch die voll ausgezogene Linie a—a dargestellt, deren über und unter FF gelegene Ordinaten den positiven resp. negativen Werten von $\frac{dg}{ds}$ proportional sind. In dem Punkte O, vertikal oberhalb der Grenzlinie der Scholle, erreicht diese Grösse den positiven Wert von 19.10^{-9} C. G. S. nimmt von da nach beiden Seiten ab, und wird dann in den Punkten E und F den Wert Null erreichend in noch grösseren Entfernungen negativ.

Nicht so die auf das Pendel ausgeübten Wirkungen. Die der angenommenen iso-

statischen Massenverteilung entsprechende Beschleunigung ist in unendlicher Entfernung von O auf beiden Seiten dieselbe, wie in diesem Punkte selbst, in endlicher Entfernung aber auf der linken Seite etwas kleiner, auf der rechten etwas grösser als dort. Am grössten ist ihr Wert in G, am kleinsten in E. Die bewirkte Störung aber, d. i. Δg , welche unter Beibehaltung der geometrischen Ähnlichkeit mit der Dicke D proportional ist, erreicht für geologisch wahrscheinliche Dimensionen nur sehr kleine Werte. Für $D = 1$ Kilometer ist $\Delta g = 0,001$ C. G. S. und für $D = 10$ Kilometer $\Delta g = 0,010$ C. G. S.

Es ist also kaum zu erwarten, dass das Pendel über das Vorhandensein solcher im Erdinnern verborgenen isostatischer Massenanordnungen Aufschluss erteilen könne.

Selbst das Lot eignet sich besser dazu, denn seine Ablenkung erreicht im Punkte O den Wert von 3 Sekunden, im Falle dass $D = 10$ Kilometer, und 0,3 Sekunden wenn $D = 1$ Kilometer ist. Die Drehwage ist aber auch bezüglich der Erkennung solcher Krümmungsstörungen in grossem Vorteile.

In der Figur habe ich die Werte von $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ oder, da $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ in diesem Falle gleich Null ist, die gleichbedeutenden Werte von $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$ durch eine gebrochene Linie b—b dargestellt. Dem Maximum links von O entspricht ein Wert von $+ 12.10^{-9}$ C. G. S. dem Minimum rechts von demselben Punkte der Wert von $- 12.10^{-9}$ C. G. S. Ich glaube an diesen Beispielen genügend erwiesen zu haben, dass die Drehwage berufen ist manche Aufklärungen über den Bau der Erdrinde zu geben auch in solchen Fällen, wo Pendel und Lot, wenigstens in ihrer heute gebräuchlichen Form, sich derartigen Fragen gegenüber stumm verhalten.

IV. BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN STÖRUNGEN DER SCHWERKRAFT UND DES ERDMAGNETISMUS.

Es kann kaum bezweifelt werden, dass Massen magnetischer Gesteine magnetische Störungen auch grösserer Gebiete bewirken können. Ja, die Herren RÜCKER und THORPE haben gezeigt, dass durch passende Annahmen über die Verteilung solcher Massen auch so bedeutende Störungen erklärt werden könnten, wie sie auf den britischen Inseln beobachtet wurden.

Trotzdem ist es bisher nicht gelungen die magnetischen Störungen mit jenen der Schwerkraft derartig in engeren Zusammenhang zu bringen, dass beide Arten der Störungen als von denselben Massen herrührend betrachtet werden könnten. Herr I. LIZNAR, der in seinem musterhaften Werke »Die Verteilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn« eine interessante Zusammenstellung beider Störungsarten an 55 Stationen mitteilt, gelangt auf dieses Beobachtungsmaterial gestützt zum Schlusse, dass »im Allgemeinen eine Beziehung zwischen den Störungen der Schwere und des Erdmagnetismus nicht bestehen kann«.

Die Ursache eines solchen negativen Resultats könnte darin gesucht werden, dass

magnetische Störungen ausser von magnetisch wirkenden Gesteinen auch von Unregelmässigkeiten der Erdströme herrühren; doch glaube ich dafür eine bessere Erklärung geben zu können.

So lange nämlich, als das Wort Schwerestörung nur zur Bezeichnung jener Störungen benützt wird, welche mit dem Pendel und mit dem Lote beobachtet werden können, ist es tatsächlich nicht möglich einen Zusammenhang festzustellen zwischen den beiderartigen Störungen desselben Ortes.

Die von einer Masse ausgeübte magnetische Kraft ist nämlich nicht mit ihrer Anziehungskraft, sondern mit den Gradienten dieser Anziehungskraft proportional.

Wenn X, Y, Z die Komponenten der magnetischen Kraft bezeichnen, welche eine Masse ausübt, für welche die Komponenten der Magnetisierung α, β, γ constant sind, ferner V das Potential der Massenanziehung, G die Gravitationsconstante und σ die Dichte bedeutet, dann bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\beta}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ Y &= \frac{\alpha}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\beta}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ Z &= \frac{\alpha}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\beta}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots 18.)$$

Im Falle nicht homogener Magnetisierung gelten diese Gleichungen nur für unendlich kleine Raumelemente der Masse, und wenn diese in eine andere eingeschlossen ist, dann sind die Grössen α, β, γ und auch σ durch ihre Differenzen zu ersetzen, den beiderartigen Massen entsprechend. Mit Benützung der Beziehung $\Delta V = 0$ erhalten wir dann:

$$\left. \begin{aligned} X\beta - Y\alpha &= \frac{\alpha\beta}{G\sigma} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{G\sigma} \right) \frac{\partial V}{\partial x \partial y} + \frac{\beta\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\alpha\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ 2\gamma X + \alpha Z &= \frac{\alpha\gamma}{G\sigma} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{2\beta\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{(2\gamma^2 + \alpha^2)}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\alpha\beta}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ 2\gamma Y + \beta Z &= -\frac{\beta\gamma}{G\sigma} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{2\gamma\alpha}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha\beta}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{(2\gamma^2 + \beta^2)}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \end{aligned} \right\} 19.)$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den magnetischen Wirkungen und jenen Grössen ausgedrückt ist, welche mit Hülfe der Drehwaage zu ermitteln sind.

Im Falle die magnetischen Massen längs einer Geraden, z. B. in der Richtung der y gleichmässig verteilt sind, oder Stufen bilden, wie sie in den Figuren 16 und 17 des vorangehenden Kapitels dargestellt sind, (magnetisch tektonische Linien) kann man diese Gleichungen durch viel einfachere ersetzen:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ Y &= 0 \\ Z &= -\frac{\gamma}{G\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \end{aligned} \right\} \dots 20.)$$

Wobei zu bemerken ist, dass da $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ direkt mit der Drehwage bestimmbar ist.

Diese Beziehungen beweisen zur Genüge, dass grössere magnetische Störungen nicht eben dort zu suchen sind, wo das Pendel bedeutende Abweichungen vom Werte der normalen Beschleunigung anzeigt. Im Falle einer schematisch plattenförmigen magnetisch wirkenden Masse sind die magnetischen Störungen nicht in der Mitte, sondern an den Rändern derselben am grössten, also längs der tektonischen Linien, wie dies Ed. NAUMANN durch passende Zusammenstellung vieler Beobachtungen nachgewiesen hat.

Durch Berücksichtigung des dargestellten Zusammenhanges wird es nun möglich, mit Hülfe magnetischer Beobachtungen gewisse Folgerungen auch auf die Qualität jener Massen zu ziehen, welche auf die Drehwage einwirken. Die Magnetisierung von Gesteinen kann eine zweifache sein, entsprechend einerseits der Induction im irdischen Kraftfelde, andererseits ihrem remanenten Zustande. Im ersten Falle ist:

$$\alpha = \kappa A, \beta = \kappa B, \gamma = \kappa C$$

wo κ den Magnetisierungscoefficienten (Susceptibilität) des Materials, A, B und C die Komponenten der erdmagnetischen Kraft bedeuten. Den Bestimmungen der Herren THORPE u. RÜCKER, sowie auch meinen eigenen derartigen Messungen entsprechend kann angenommen werden, dass die Werte von κ für Eruptivgesteine zwischen den Grenzen von 0,01 und 0,001 liegen.

Um ein Maass für die Wirkung solcher Gesteine zu erhalten, wollen wir für die Dichtedifferenz den Wert $\sigma = 0,5$ annehmen, und $A = 0,2$, $C = 0,4$ setzen, dann geben die Formeln (20)

$$\begin{aligned} X &= 0,006 \kappa \cdot 10^9 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 0,012 \kappa \cdot 10^9 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ Z &= -0,012 \kappa \cdot 10^9 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 0,006 \kappa \cdot 10^9 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

und wir können uns leicht überzeugen, dass schon an Orten, wo die Drehwage Gradientenwerte von einer 10^{-9} Einheit anzeigt, durch den inducierten Magnetismus der Gesteine hervorgerufene magnetische Störungen möglich sind, welche den Wert 0,0001 C. G. S. erreichen, also messbar sind. Der remanente Magnetismus und seine Wirkung kann in manchen Fällen noch höher veranschlagt werden.

An allen Orten, wo wir die Drehwage aufstellten, haben wir auch die magnetischen Intensitätskomponenten bestimmt, ja wir haben sogar die Lücken zwischen entfernten Stationen durch relative Bestimmungen der Horizontalintensität und der Deklination ausgefüllt. Das reiche Beobachtungsmaterial harrt teilweise noch der Bearbeitung und es wäre hier auch nicht am Platze dasselbe eingehender zu behandeln. Erwähnen will ich nur, dass ich an manchem Orte magnetische Störungen fand, welche den Angaben der Drehwage entsprechend auf Wirkungen magnetischer Gesteine zurückführbar sind. Doch fand ich im Gebiete der Fruska Gora auch solche sich mit auffallender Regelmässigkeit weit erstreckenden magnetischen Störungen, deren Grösse und räumliche Verteilung eine Erklärung durch magnetische Gesteine kaum zulässt. Wahrscheinlich haben wir es hier mit Massen viel grösserer Suszeptibilität, also mit Eisenerzen zu tun, vielleicht mit den Wirkungen von Erdströmen. Bei der Aufklärung solcher Rätsel wird die Drehwage gute Dienste leisten.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass es auf Grundlage der Formeln 18.), 19.), 20.) möglich wird, im Falle homogener Magnetisierung, deren Komponenten α, β, γ auch für ganz unregelmässig gestaltete Massen in deren unmittelbaren Nähe mit der Drehwage und mit magnetischen Messinstrumenten zu bestimmen.



1 B2/200 00009130

TTK KARI kvf.

Földtudományi Szakgy.

